

## 芝諾詭論的三個觀點

「一尺之棰，日取其半，萬世不竭。」莊子·天下篇。

### § 楔子

十多年前，小女推甄上文華高中。新生訓練完，帶回一份數學作業。

其中有一題是這樣的:

假設有一隻烏龜在阿基里斯前面 100 公尺處，速度是阿基里斯的 $\frac{1}{10}$ 倍,兩者賽跑。

當阿基里斯跑完這 100 公尺，烏龜在前面 10 公尺處，

當阿基里斯跑完這 10 公尺，烏龜在前面 1 公尺處，

當阿基里斯跑完這 1 公尺，烏龜在前面 $\frac{1}{10}$ 公尺處，...

所以阿基里斯永遠追不上烏龜。試說明之。

### § 選或不選

電子報第 59 期中轉載了李國偉先生的文章「球詭論」。

球詭論用到「選擇公設」，誠如李先生的話: 如果數學家放棄了「選擇公設」，那麼很多美麗的古典數學證明就要瓦解；如果數學家保留了「選擇公設」，就得跟一球分兩球這些奇怪的後果和平共存。

目前數學家已經知道無法從其他常用的集合論公設推導出「選擇公設」，但是也無法用它們來推翻「選擇公設」。

因此「選或不選」，也就在一念之間了。

### § 背景

西元前第五世紀希臘哲學家對於不變與常變的世界觀有兩派是對立的。

赫拉克利特(Heraclitus of Ephesus 540~480BC)認為，宇宙不斷變動，萬物都在無始無終地變動。他有一句名言:人不能兩次走過同一條河流。

這句名言的意思是說，河裡的水是不斷流動的，你這次踏進河，水流走了，你下次踏進河時，又流來的是新水。河水川流不息，所以你不能踏進同一條河流。

巴門尼德(Parmenides 510~430BC)則主張，存在或有(Being)是個太一(One)，連續永在，與變動是不相的。

巴門尼德認為，若萬物不斷變動，則有可能出現以前未曾有的東西，既然未曾存在的東西還沒有存在，就表示不可能有變動。

伊利亞學派(Eleatic School)和西元前第六世紀的佛陀同時期。

伊利亞的芝諾(Zeno Of Elea 約 490~425BC)是巴門尼德的學生和朋友，他的著作「論自然」已失傳。而他的詭論是通過批評他的亞里斯多德及其譯著者辛普里西奧斯而流傳下來。

柏拉圖在他的「巴門尼德」篇中，記述了芝諾與巴門尼德在西元前五世紀中期去雅典的一次訪問。並在書中記述了芝諾的觀點。據說芝諾在為巴門尼德的「存在論」辯護。

芝諾巧妙地構想出一些關於運動的論點，就是所謂的「芝諾詭論」。其中之一就如楔子中所述。

### § 數學觀點

假設楔子中，阿基里斯的速度是 10 公尺/秒。則他追上烏龜的時間是

$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots$  (秒)，只要我們有極限的觀念就能解決。

也就是說  $\frac{100}{9}$  秒時阿基里斯追上烏龜。

### § 物理觀點

方勵之先生(註 1)是中國有名的天文物理學家,更是民主鬥士。

以下是方先生的見解：

任何一種具有重複性的過程,都可以做為"鐘"。

在芝諾詭論中有兩個不同的時間度量。

假設阿基里斯與烏龜在開始時的距離為  $L$ ，速度分別為  $u$ 、 $v$ ；如果用普通的鐘，則阿基里斯將在  $t = \frac{L}{u-v}$  時，趕上烏龜，當  $t > \frac{L}{u-v}$  時，阿基里斯就超過烏龜了。

但是在詭論中，芝諾用了另一個鐘，該鐘使用的重複性過程是：阿基里斯逐次地到達烏龜在前一次的出發點，我們稱之為芝諾鐘。

它測得的時間為  $t'$ 。對任何  $t'$ ，阿基里斯永遠在烏龜後面，這是芝諾的結論。

其錯誤來自於  $t'$  的局限性，它沒法度量  $t > \frac{L}{u-v}$  之後的時間。

### § 佛學(或者說哲學)觀點

在佛教，現象(色)是空的，沒有真正的、獨立的存在，存在是一個永恆的變化。

(所以說，佛學是支持赫拉克利特、反對巴門尼德的。)佛法用類似芝諾詭論的邏輯來表現從相對真理的觀點，看起來像是因果互動的事情其實沒有真正的存在。

現象(色)從空性中顯現，相互依存。

這就是「空即是色，色即是空」的道理。

巴門尼德的哲學採取一個與佛學完全相反的立場。對巴門尼德而言，存在是現成而不動的，變化是不可能的，動是不可能的。

芝諾所提的「詭論」，目的就是要否定動力的存在。

沒有「連續性」的概念，就沒有動作。

射出來的箭永遠沒有動作，因為如果你取出它飛行中的每一剎那，那每一剎那都是靜態的。

以相同的邏輯，阿基里斯永遠追不上烏龜。

### § 後記

芝諾詭論是老梗了，作為「極限」觀念的引入而言，每一本微積分課本都會提到。康明昌先生在「微積分入門」一書中，對芝諾詭論與極限(無窮級數)有極精闢的說法。

我大學修過「集合論與數學基礎」，本文是對電子報第 59 期李國偉先生，集合論中的「球詭論」，「選或不選」的回響。

「存在或不存在」是芝諾詭論背後的哲學意義。

#### § 參考資料

1. 註:方勵之先生已於 2012 年 4 月 6 日過世。
2. 關於悖論的幾個問題 [http://w3.math.sinica.edu.tw/math\\_media/d174/17409.pdf](http://w3.math.sinica.edu.tw/math_media/d174/17409.pdf)
3. 芝諾詭論的意義

[http://amuseum.cdstm.cn/AMuseum/math/3/3\\_23/3\\_23\\_1003.htm](http://amuseum.cdstm.cn/AMuseum/math/3/3_23/3_23_1003.htm)

對芝諾詭論的來龍去脈有深刻的說明。

4. 世界數學簡史----- 凡異出版社 p.90
5. 微積分入門(康明昌)-----故鄉出版社 p.120
6. 力學概論(方勵之)-----正中書局 p.10
7. 邏輯與數學思維(王九達)-----凡異出版社 p.45
8. 老謀深算-----牛頓出版社 p.80
9. 盧昌海(芝諾悖論淺析)  
[http://www.changhai.org/articles/science/misc/zeno\\_paradox.php](http://www.changhai.org/articles/science/misc/zeno_paradox.php)
10. 量子芝諾詭論 [http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum\\_Zeno\\_effect](http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_Zeno_effect)