§ 楔子

1974 年，一太空總署的客座教授在台大數學系開了一門課:解 Ax=b。

解 Ax=b 要上一學期，真是太神奇了，我很好奇地去聽了一節課。

原來這 x 表示可能上百個未知數。我大學主要都修純數學，因此也就聽了那麼一節。

大約是 1979 年，我到台中明道中學任教。期中有一次教學觀摩，由何老師主持。題目是：疊合原理。這是我與疊合原理的第一次接觸。

何老師是我的前輩，我一路跟著他從明道中學、立人高中到衛道中學。

99 課程綱要第三冊有一個主題是把直線的一般式改成參數式。如果有法向量與內積的觀念，這倒不是難事。偏偏法向量與內積擺在後面。據我所知，因此有的學校乾脆先教內積，再回頭教直線的參數式。

我個人覺得如果教學時間允許，引入「疊合原理」也不錯。

§ 疊合原理

疊合原理:線性方程式(組)的一般解=齊次解+特別解。

f(X)=AX+B 是一線性函數。X_0 是其齊次式的解，即 $AX_0=O$；X_1 是其特別解，即 $f(X_1)=AX_1+B=O$，則 $f(X_0+X_1)=A(X_0+X_1)+B=AX_0+(AX_1+B)=O$，所以 X_0+X_1 是 f(X)=O 的一般解。

例 1:化一般式 2x+3y-1=0 為參數式。

2x+3y=0 稱為齊次式，其解為 x:y=3:-2，即 x=3t、y=-2t。

任意取一特別解，x=2、y=-1。則一般解為 x=3t+2，y=-2t-1。此即為直線的參數式。

一般解=	齊次解	+特別解
x=	3t	+2
y=	-2t	-1

此處，我們令 $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}$

例 2:把空間中的直線 L 的兩平面式 $\begin{cases}2x+3y-z-11=0\\ x-2y+z+1=0\end{cases}$ 改為參數式。

先求齊次式 $\begin{cases}2x+3y-z=0\\ x-2y+z=0\end{cases}$ 的解：$x:y:z=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=1:-3:-7$

所以 x=t，y=-3t，z=-7t。

其次，取一特別解 x=3，y=1，z=-2。

則一般解(即參數式)為 $\begin{cases}x=t+3\\ y=-3t+1\\ z=-7t-2\end{cases}$，$t\in R$

此處，我們令 $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，X= $\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$，B= $\begin{bmatrix}-11\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$

§ 習作

1. 已知 $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$，$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=0\\ a_2x+b_2y+c_2z=0\\ a_3x+b_3y+c_3z=0\end{cases}$ 有一組解(2,3,4)；$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$ 有一組解(-1,2,5)，求 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$ 的一般解

§ 參考資料

1. 再談費氏數列(賴東昇)p.3 有提到疊合原理。
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_06_10_1/page3.html