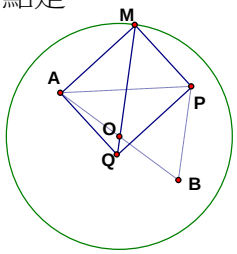
§ 數學裡面有許多解題策略。

試舉例說明:(1)極端化原理 (2)簡化原理 (3)轉化原理 (4)類比 (5)建立座標系。

§1 極端化原理: 把一個動點或一個變數(變量)移動到一個特殊情況,有時候能洞見解題機竅。

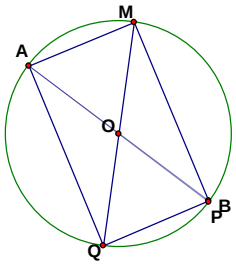
例1.給定一圓,其圓心為 O,設點 A 與 B 在此圓的內部,且 $\overline{AB}$ 的中點是 O。對於在此圓上但不在直線上的任意點 M,作矩形 MAQP 使得直線 $\overline{MQ}$ 通過 O。證明: $\overline{PA}+\overline{PB}$ 為定值(即與 M 的位置無關)

(教育部 87 年度數學競試題)



解

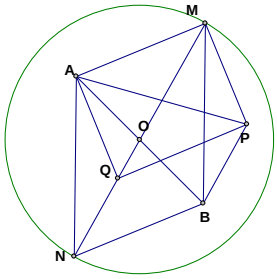
用 GSP 試著把點 A 拉到圓上,我們發現點 P 與 B 重合,所以 $\overline{PA}+\overline{PB}=$直徑,所以這個常數就是直徑。這樣的〝預見〞對證明有所助益。



延長 $\overline{OQ}$ 到圓上 N 點,連接 $\overline{NB},\overline{AN}$

因為 $\overline{OA}=\overline{OB},\overline{OM}=\overline{ON}$,所以 ANBM 是平行四邊形,

$\overline{AM}$ 與 $\overline{BN}$ 平行且相等。

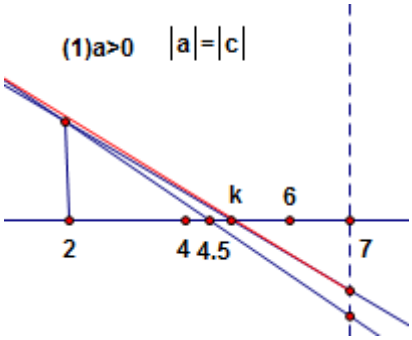


因為 MAQP 是矩形, $\overline{AM}$ 與 $\overline{PQ}$ 平行且相等,

所以 $\overline{BN}$ 與 $\overline{PQ}$ 平行且相等,所以 PQNB 是平行四邊形,因此 $\overline{PB}=\overline{QN}$

所以 $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{MQ}+\overline{QN}=\overline{MN}$ 為圓的直徑,是一常數,得證。

例2.　直線L通過A(2,a),B(4,b),C(7,c),(k,0),且$|a|>|c|>|b|$ 求k的範圍

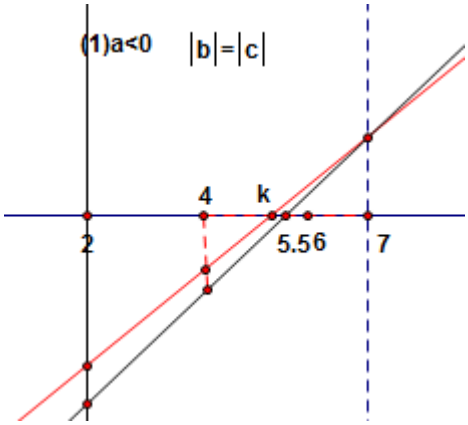


此時直線L通過(4.5,0)

$|a|=|c|>|b|=0$

固定A點,L稍上移

則$|a|>|c|>|b|$且k>4.5



此時L通過(5.5,0)

$|a|>|c|=|b|$

固定C點,L稍上移

則$|a|>|c|>|b|$且k<5.5

§2 簡化原理

一個複雜的題目,先把問題簡化可以找到解題的方法。

例3.a,b,c,d都是大於0,小於1的數,試證

(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)>1-a-b-c-d

先考慮(1-a)(1-b)=1-a-b+ab>1-a-b...(1)

(1)兩邊同乘(1-c)

(1-a)(1-b)(1-c)>(1-a-b)(1-c)=1-a-b-c+ac+bc>1-a-b-c...(2)

(2)兩邊同乘(1-d)

(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)>(1-a-b-c)(1-d)=1-a-b-c-d+ad+bd+cd>1-a-b-c-d得證。

例4.　比較 2005^{2004} 與 2004^{2005} 的大小。

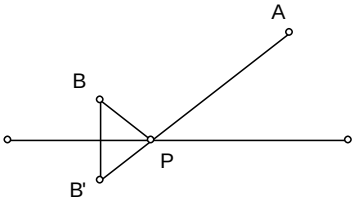
先比較 4^3 與 3^4；5^4 與 4^5，其次用數學歸納法證明 $n \geq 3$ 時，$(n+1)^n < n^{n+1}$

§3 轉化原理

例5.求 $f(x)=\sqrt{(x-4)^2+25}+\sqrt{(x+1)^2+4}$ 的最小值

解 我們要把這個代數問題轉化為幾何問題。

假設 A(4,5),B(-1,4),P(x,0),則



$f(x)=\overline{PA}+\overline{PB}$,其中 P 點在 x 軸上動,由反射定律知 P 點是 $\overline{AB'}$ 與 x 軸的交點,(B′是 B 點關於 x 的對稱點)所以 f(x)的最小值

$=\overline{AB'}=\sqrt{106}$

例6.　求 $f(x)=\sqrt{x^4-7x^2+16}+\sqrt{x^4-7x^2-6x+25}$ 的最小值

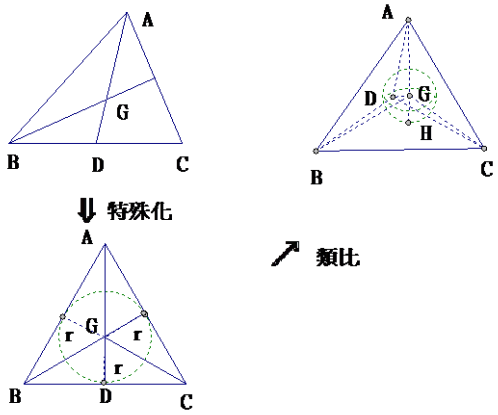
f(x)改寫成 $\sqrt{(x^2-4)^2+(x-0)^2}+\sqrt{(x^2-4)^2+(x-3)^2}$,令 A(4,0),B(4,3),P(x^2,x),

則原式=$\overline{PA}+\overline{PB}$,P 點在拋物線 $x=y^2$ 上動

所以 P(4,2)時,即 x=2 時,f(x)有最小值=3

§4 類比

類比是某些類型的相似性，是發現的重要觸媒。



例7.證明正四面體的內切球半徑=正四面體高的 $\frac{1}{4}$ 。

G 是 ΔABC 的重心,則 $\frac{\overline{AG}}{\overline{AD}}=?$

右上圖中,我們考慮其特殊情形,即考慮一正三角形,

則 $\Delta ABC=\Delta GAB+\Delta GBC+\Delta GAC$,則 $\overline{GD}=\frac{1}{3}\overline{AD}$,即

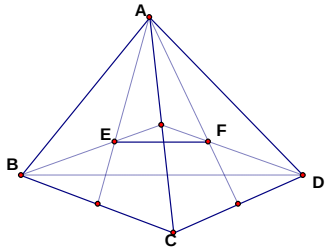
$\frac{\overline{AG}}{\overline{AD}}=\frac{2}{3}$

往空間類推,ABCD 是正四面體,G 是其重心,則

v(ABCD)=v(GABC)+v(GABD)+v(GACD)+v(GBCD),因此 $\overline{GH}=\frac{1}{4}\overline{AH}$,亦即

正四面體的內切球半徑=高的 $\frac{1}{4}$ 。

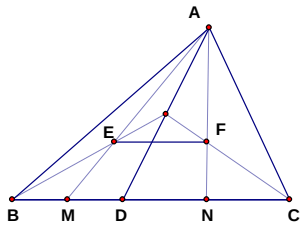
例8.(甲)正四面體 ABCD 中,E、F 分別是 $\Delta ABC,\Delta ACD$ 的重心，求 $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{BD}}=$

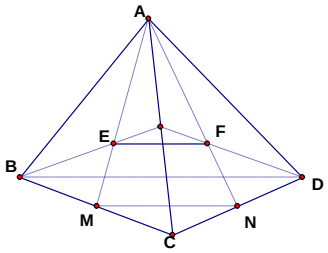


想到國中有一個類似的題目:

(乙)D 是 ΔABC 中 $\overline{BC}$ 邊上任一點,E,F 分別是 $\Delta ABD,\Delta ACD$ 的重心,求 $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$

解 $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{MN}}\times\dfrac{\overline{MN}}{\overline{BC}}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$





所以(甲)的解: $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{MN}}\times\dfrac{\overline{MN}}{\overline{BD}}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$

(甲)是高中生問的題目,我提示(乙)。如果學生國中數學印象(記憶)還不錯,經此提示,當對(甲)留下深刻的記憶。這是類比在學習上的功用。

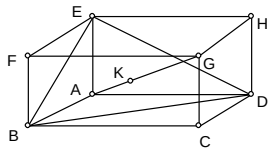
§5 建立座標系

建立座標系,用代數的方法解決幾何問題,用幾何解決代數問題是笛卡爾,費馬的創見，是一個重要的方法。建立一般坐標系,然後把直角坐標系內容直接拿來使用也是一個重要的方法。

例9.長方體 ABCD-EFGH,直線 $\overline{AG}$ 交平面 BDE 於 K,證明 K 是 Δ BDE 的重心

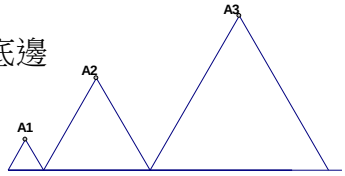
設 A(0,0,0),B(a,0,0),D(0,b,0),E(0,0,c),G(a,b,c)

則 $\overline{AG}:\begin{cases} x=a+at \\ y=b+bt \\ z=c+ct \end{cases}$，代入平面 BDE $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 中，解得



t=$-\frac{2}{3}$，代回原式，解得 K$(\frac{a}{3},\frac{b}{3},\frac{c}{3})$ 為 Δ BDE 的重心

例10. 把邊長 1,3,5,...,2n-1,...的正三角形底邊放在同一條線上，且角頂靠角頂，如右圖。試證這些正三角形的頂點 $A_1,A_2,A_3,...,A_n$ 落在同一拋物線上。



證明 建立直角座標系，使得 $A_1(0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$A_2(\frac{1}{2}+\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2})$，$A_3(\frac{1}{2}+3+\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2})$，...

$A_n(x_n,y_n)$，其中

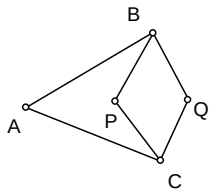
$x_n=\frac{1}{2}+3+5+...+(2n-3)+\frac{2n-1}{2}=n^2-n$

$y_n=\frac{(2n-1)\sqrt{3}}{2}$，$y_n{}^2=\frac{3(2n-1)^2}{4}=\frac{3}{4}[4(n^2-n)+1]=3x_n+\frac{1}{4}$

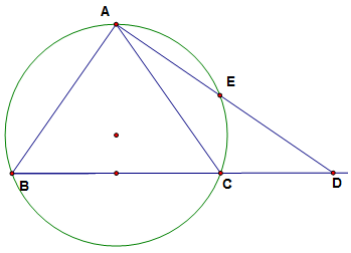
所以三角形的頂點 $A_n(x_n,y_n)$ 落在拋物線 $y^2=3x+\frac{1}{4}$ 上

◇習作◇

1. $\overline{AB}=\overline{AC}=6$，PCQB 是邊長為 4 的菱形，則 $\overline{AP}\times\overline{AQ}=$



2. ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=5$，$\overline{BC}=6$，D 在直線 $\overline{BC}$ 上，$\overline{AD}$ 交 ΔABC 的外接圓於 E，則 $\overline{AD}\times\overline{AE}=$



3. 已知 $|a|<1,|b|<1,|c|<1$ 試證 $\left|\frac{a+b+c+abc}{1+ab+bc+ac}\right|<1$

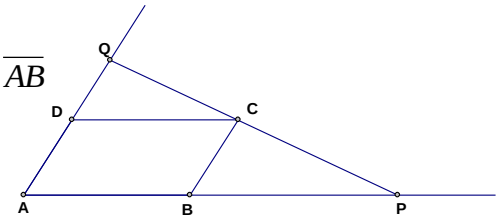
4. $\sqrt{1111111111111\times1000000000005+1}$（建中通訊徵答）

5. 已知 abc=1,求 $\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ac}=$

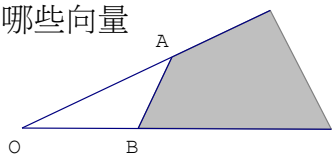
6. 求 f(x)= $\sqrt{x^4-7x^2+16}+\sqrt{x^4-7x^2-6x+25}$ 的最小值

7. 求 f(x)= $\sqrt{x^4-3x^2+4}+\sqrt{x^4-3x^2-8x+20}$ 的最小值,又,此時 x=

8. $\square ABCD$ 中, $\overline{AB}=6,\overline{AD}=4$, $\angle A=30^0$, 過 C 作一直線交 $\overline{AB}$ 射線於 P,交 $\overline{AD}$ 射線於 Q,則 ΔAPQ 面積最小=



9. 如右圖所示,兩射線 OA,OB 交於 O 點,試問下列選項中哪些向量的終點會落在陰影區域內?



(A) $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$ (B) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ (C) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

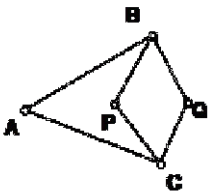
(D) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$ (E) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$ (94 年學測)

10. ΔABC 中,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),取外心 O(0,0),(1)求 ΔABC 的垂心坐標 (2)證明 ΔABC 的外心 O,重心 G,垂心 H 三點共線

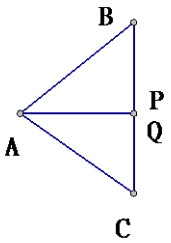
11. 求 f(x)= $\sqrt{x^4-3x^2+4}+\sqrt{x^4-3x^2-8x+20}$ 的最小值,又,此時 x=

◇解答◇

1.



⇒



讓 P,Q 兩點靠攏,形如左圖是極端化的情形,

此時 $\overline{AP}\times\overline{AQ}=6^2-4^2=20$, 即為所求。

2. D 在直線 $\overline{BC}$ 上($\overrightarrow{CD}$ 射線)動,讓 D 點落在 C 點,則 C、D、E 重合,

$\overline{AD}\times\overline{AE}=\overline{AC}\times\overline{AC}=25$

3．如果「$|a|<1,|b|<1\Rightarrow\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$」成立，

然後上式中，取 a=$\dfrac{a+b}{1+ab}$，b=c，則$\left|\dfrac{\dfrac{a+b}{1+ab}+c}{1+(\dfrac{a+b}{1+ab})c}\right|<1$，分子分母同乘以 1+ab，

得$\left|\dfrac{(a+b)+c(1+ab)}{(1+ab)+(a+b)c}\right|<1$，即$\left|\dfrac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc}\right|<1$，原式即得證。

我們再回頭證明「　」的部分

$\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1\Leftrightarrow|a+b|<|1+ab|\Leftrightarrow(a+b)^2<(1+ab)^2$

$(1+ab)^2-(a+b)^2=a^2b^2-a^2-b^2+1=(1-a^2)(1-b^2)>0$，得證。

4．先考慮$\sqrt{111\times1005+1}$，令 a=111，則 1005=9a+6，所以

$\sqrt{111\times1005+1}=\sqrt{a(9a+6)+1}=\sqrt{(3a+1)^2}=3a+1=334$

因此，我們看出來原來題目中，取 a=111111111111，則

$\sqrt{111111111111\times1000000000005+1}$=3a+1=333333333334

5．我們先看一個簡化的例子：ab=1，求$\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}=$

解 $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}=\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{a}{a+ab}=\dfrac{1+a}{1+a}=1$

所以$\dfrac{1}{1+a+ab}+\dfrac{1}{1+b+bc}+\dfrac{1}{1+c+ac}$

$=\dfrac{1}{1+a+ab}+\dfrac{a}{a+ab+abc}+\dfrac{ab}{ab+abc+a^2bc}$

$=\dfrac{1}{1+a+ab}+\dfrac{a}{a+ab+1}+\dfrac{ab}{ab+1+a}=\dfrac{1+a+ab}{1+a+ab}=1$

6．f(x)改寫成$\sqrt{(x^2-4)^2+(x-0)^2}+\sqrt{(x^2-4)^2+(x-3)^2}$，令

A(4,0)，B(4,3)，P(x^2,x)，則原式=$\overline{PA}+\overline{PB}$，P 點在拋物線 x=$y^2$ 上動

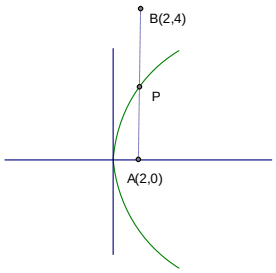
所以 P(4,2)時，即 x=2 時，f(x)有最小值=3

7. f(x)=$\sqrt{(x^2-2)^2+x^2}+\sqrt{(x^2-2)^2+(x-4)^2}$ 取 A(2,0),B(2,4),P(x^2,x),則原式即

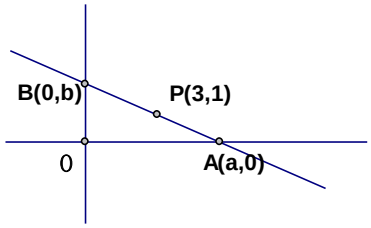
為$\overline{PA}+\overline{PB}$,表示 P 點在拋物線 y^2=x 上動,求$\overline{PA}+\overline{PB}$的最小值

由右圖可知 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值= $\overline{AB}$ =4

此時 x=2



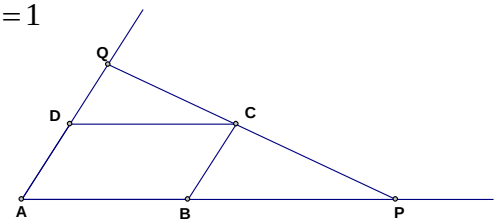
8．我們想到以前用算幾不等式做過的一道題目。P(3,1)，過 P 作一直線交 x，軸於 A，B 兩點，則 Δ OAB 面積最小=



所以原題目可以這樣做

假設 $\overline{AP}=6a,\overline{AQ}=4b$，則 $\Delta APQ=\frac{1}{2}\times 6a\times 4b\times \sin 30^0=6ab$

因為 $\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{CQ}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{DQ}}{\overline{AD}}$，所以 $\frac{6}{6a-6}=\frac{4b-4}{4}$，得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$



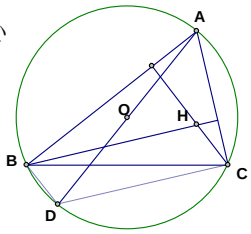
由算幾不等式 $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\geq\sqrt{\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}}$，$ab\geq 4$，所以 ΔAPQ

面積最小值=24

9．建立一般坐標系(斜坐標系)使得 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow$ P(x,y)，則陰影區域所

滿足的不等式為 $\begin{cases} x+y\geq 1 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$，所以答案是(A)，(B)

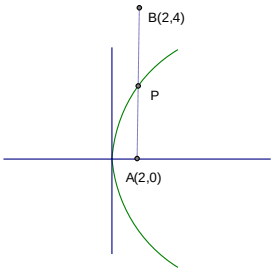
10．作 Δ ABC 的外接圓 O，延長 $\overline{OA}$ 交圓 O 於 D，假設 H 是垂心



因為 $\overline{AD}$ 是直徑，$\angle ABD=90^0$，$\overline{CH}\perp\overline{AB}$，所以 $\overline{BD}//\overline{CH}$，同理 $\overline{CD}//\overline{BH}$，即 BCDH 是平行四邊形

D($-x_1$,$-y_1$)，因為 $\overline{BC}$ 的中點= $\overline{DH}$ 的中點，得 H($x_1+x_2+x_3$,$y_1+y_2+y_3$)

重心 G($\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$,$\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$)，$\overline{OH}=3\overline{OG}$，所以 O，G，H 共線。

11. f(x)= $\sqrt{(x^2-2)^2+x^2}+\sqrt{(x^2-2)^2+(x-4)^2}$ 取

A(2,0),B(2,4),P(x^2,x),則原式即為 $\overline{PA}+\overline{PB}$,表示 P 點在拋物線 y^2=x 上動,求 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值。由右圖可知 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值= $\overline{AB}$ =4，此時 x=2。