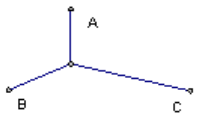
§ 最短路徑問題

連接三個點的網路線什麼時候最短?

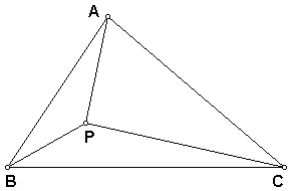


這個最短路徑問題在 1640 年由費馬(Pierre de Fermat 1601~1665)提出，托里拆略(Evangelista Torricelli1608~1647)解決了，後來瑞士數學家史坦那(Jacob Steiner 1796-1863)繼續研究深入，最後叫做史坦那比例猜測。

最短路徑問題的證明在 1990 年由貝爾實驗室的黃光明與堵丁柱先生完成。

§ 等權三鎮距離和的最小值

P 是 ΔABC 內一點, f(P)= $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 則 $\frac{1}{2}l < f(P) < l$,其中 l 三角形的周長。



那麼

1. f(P)有沒有最小值?
2. 若 f(P)有最小值 f(P_0),則 P_0在那裡?

第一點是肯定的，由高等微積分保證。
對於第二點，用 GSP 來模擬是個好點子，基本上就是去猜測!
經過許多圖形的觀察後，發現似乎∠APB=∠BPC=∠CPA=120^0。

那一個點 P 如何建構呢?
如果 ΔABC 三內角皆小於 120^0，向三邊作正三角形，及其外接圓，則此三個外接圓交於一點 P，此 P 點即為所求。如果 ΔABC 中有一角大於 120^0，例如∠A，則 P 點就取 A 點。

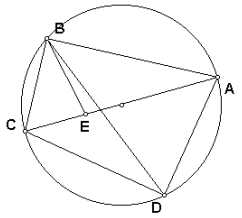
註 1:P 點稱為費馬點，為什麼在費馬點 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 產生最小值，請看參考資料(11)。

註 2:費馬點的物理意義請看參考資料(2)(3)(7)。

§ 證明

1. 托勒密(Ptolemy)定理

圓的內接四邊形的邊角關係除了對角互補之外,還有托勒密(Ptolemy)定理: $\overline{BC}\times\overline{AD}+\overline{AB}\times\overline{CD}=\overline{AC}\times\overline{BD}$



證明：

作 $\angle CBE=\angle ABD$,因為 ∠ACB=∠ADB 所以 $\Delta BCE\sim\Delta BDA$ ，

$\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{AD}}\cdots(1)$

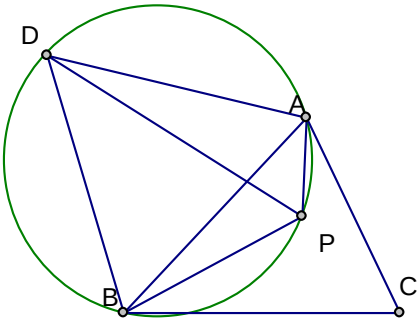
同理，因為 $\angle BDC=\angle BAC,\angle DBC=\angle ABE$ 所以 $\Delta BCD\sim\Delta BEA$ ，

$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AE}}\cdots(2)$，因此

$\overline{AC}\times\overline{BD}=(\overline{AE}+\overline{CE})\times\overline{BD}$

$=\overline{AE}\times\overline{BD}+\overline{CE}\times\overline{BD}=\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}$

2. 以 Δ ABC 的一邊向外作 一正三角形 ABD，及其外接圓，P 是(劣)圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上任意點,則 $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PD}$

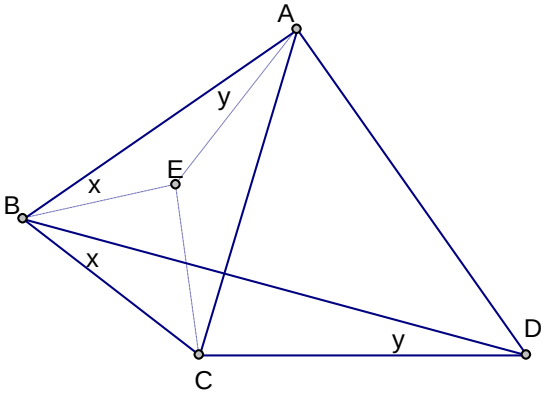


證明：

由托勒密定理: $\overline{PA}\times\overline{BD}+\overline{PB}\times\overline{AD}=\overline{AB}\times\overline{PD}$

等式兩邊 $\overline{BD}=\overline{AD}=\overline{AB}$ ，所以 $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PD}$ ，得證。

3. ABCD 不共圓,且不共線,則 $\overline{BC}\times\overline{AD}+\overline{AB}\times\overline{CD}>\overline{AC}\times\overline{BD}$



證明：

作 $\angle ABE=\angle BDE,\angle BAE=\angle BDC$

則 $\Delta ABE\sim\Delta DBC$,所以

$\overline{AB}:\overline{BD}=\overline{AE}:\overline{CD}=\overline{BE}:\overline{BC}$

即 $\overline{AB}\times\overline{CD}=\overline{BD}\times\overline{AE}$ .....(1)

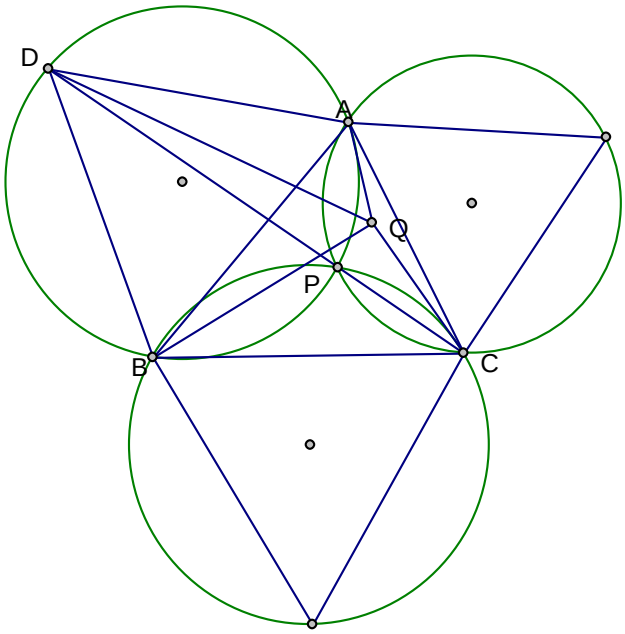
又 $\angle ABD=\angle CBE,\overline{AB}:\overline{BD}=\overline{BE}:\overline{BC}$,所以

$\Delta ABD\sim\Delta EBC$,所以 $\overline{AD}:\overline{CE}=\overline{BD}:\overline{BC}$,即 $\overline{AD}\times\overline{BC}=\overline{BD}\times\overline{CE}$ .....(2)

(1)+(2) , $\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}=\overline{BD}\times(\overline{AE}+\overline{CE})>\overline{BD}\times\overline{AC}$

4. ΔABC 三內角皆小於 120^0，P 是費馬點，Q 是 ΔABC 內，異於 P 的點。則 $\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}>\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$

證明：



Q 是 ΔABC 內，異於 P 的點。

由 3.知 $\overline{QA}\times\overline{BD}+\overline{QB}\times\overline{AD}>\overline{QD}\times\overline{AB}$

所以 $\overline{QA}+\overline{QB}>\overline{QD}$

因為 $\angle APD+\angle APC=60^0+120^0=180^0$，所以 D、P、C 共線。

所以 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=\overline{PD}+\overline{PC}=\overline{CD}$

$\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}>\overline{QD}+\overline{QC}>\overline{CD}$,即
$\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}>\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$

得證。

§ 參考資料

1. 托勒密幾何定理的應用(凡異出版社) 張澄清
2. 初中資優生的解析幾何學(三民書局) 楊維哲　作者 楊汗如 用力學模型來模擬
3. 表面張力與最短路徑探討 第 46 屆中小學科展物理科(台中一中)

   http://www.cdjh.hc.edu.tw/SC2006/senior/0401/040104.pdf

4. 數學傳播季刊第 14 卷第 2 期 p.5
   http://w3.math.sinica.edu.tw/mathmedia/
5. 數學傳播季刊第 15 卷第 2 期 p.101
6. 數學傳播季刊第 17 卷第 4 期 p.3(談談 Gilbert-Pollak 猜想證明)堵丁柱
7. 中學數學題解題妙法(夏聖亭著 p.49) 用局部變動原理解釋 120^0 現象，用肥皂泡模擬是很好的點子。
8. 數學與猜想(九章出版社 p.157)
9. 數字愛人(台灣商務出版社 p.150)
10. 第 46 屆中小學科展數學科(史坦那樹)
    http://www.cdjh.hc.edu.tw/SC2006/senior/0404/040405.pdf
11. 三角形內部一點到三頂點距離和的最大最小值　高中數學電子報第 91 期

§ 習作

1. P 是 Δ ABC 內一點, f(P)= $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 則 $\frac{1}{2}l < f(P) < l$,其中 l 三角形的周長。試證之。
2. P是四邊形 ABCD 內一點，f(P)= $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$，證明P點是對角線 $\overline{AC},\overline{BD}$ 交點時 f(P)有最小值。
3. P 是最大內角不超過 120^0 的 ΔABC 邊上或其內部一點，當 P 到三頂點有最小距離和的時候，P 稱為等角點或費馬點，其最小距離和公式：

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}\times\Delta}$$ ，其中 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ， $s=\frac{a+b+c}{2}$ 。

這個公式對最大內角不超過 120 度的三角形均成立。(參考資料 11)。

三角形 ABC 中,三邊長為 13,14,15,P 是三角形內部一點,則 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 的最小值=? $\sqrt{295+168\sqrt{3}}$