1202 年 Fibonacci 在他的書 Liber Abbaci 中的習題:兔子出生以後兩個月就能生小 兔子,若每次恰好生一對(一雌一雄),如果養了一對初生的兔子,則一年後共有幾隻兔子?(假設生下的兔子都不死)

§01 先看一個例子:$a_1=1, a_{n+1}=2a_n+1$,求 $a_n=$

假設有一個常數 c,使得 $a_{n+1}-c=2(a_n-c)$,和原式比較,得 c=-1,即我們產生一個新數列$<a_n+1>$,此新數列式等比數列,公比=2,所以

$a_n+1=(1+1)\cdot 2^{n-1}, a_n=2^n-1$

因為產生的新數列為等比數列,所以我就自告奮勇,把原數列叫做"準等比數列",但是,產生新數列的過程常使學生感到突兀;一位同事建議我這樣教:

$a_1=1$

$a_2=2+1$

$a_3=2(2+1)+1=2^2+2+1$

$a_4=2(2^2+2+1)+1=2^3+2^2+2+1$

...找到規律性

所以 $a_n=2^{n-1}+2^n+...+2+1=2^n-1$

這樣做一般學生應該可以掌握。

如果時間允許,我覺得可以再深入一點,我們可以說,$a_4 \to a_n$ 的過程其實是一個"猜想",然後引入數學歸納法,這是"證明"的部分。這樣就很完美了!這就是 Paul Erdös 說的:生命的意義在猜想與證明。

§02 以下進入主題,求費氏數列的一般項。

解法(1):造新數列

造新數列是個不錯的想法,對於費氏數列,如果存在 $\alpha,\beta$,使得 $(a_{n+2}-\alpha a_{n+1})=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$,則 $\alpha+\beta=1, \alpha\beta=-1$,$\alpha,\beta$ 是 $x^2-x-1=0$ 的兩根,則 $<a_{n+1}-\alpha a_n>$ 是一個公比為 $\beta$ 的等比數列,於是 $a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}$,

這樣的數列有必要研究一下

[引理]

數列<$a_n$>,滿足 $a_{n+1}+pa_n+qr^n=0$,則存在常數 A,B,使得 $a_{n+1}=A(-p)^n+Br^n$

證明

$a_{n+1}+pa_n+qr^n=0$.....(1)　　$a_n+pa_{n-1}+qr^{n-1}=0$...(2)　(1)-r(2)得

$(a_{n+1}-ra_n)+p(a_n-ra_{n-1})=0$

所以<$a_n-ra_{n-1}$>是一個公比=-p 的等比數列

$a_{n+1}-ra_n=(a_2-ra_1)(-p)^{n-1}$...(3)

$a_{n+1}+pa_n=-qr^n$.....(4),$(3)\times p+(4)\times r$,得

$(p+r)a_{n+1}=-(a_2-ra_1)(-p)^n-qr^{n+1}$,取 $A=\dfrac{ra_1-a_2}{p+r}$,B=-qr,則

$a_{n+1}=A(-p)^n+Br^n$

由此引理,費氏數列<$a_n$>滿足 $a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}$,所以 $a_n=A\alpha^n+B\beta^n$

取 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$,因為 $a_1=a_2=1$,取 n=1,2 代入,則

$$\begin{cases} A(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})+B(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})=1 \\ A(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^2+B(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^2=1 \end{cases}$$

,解得 $A=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,　$B=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

所以費氏數列的一般項 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n-\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n$,這是 Jacques Binet 於 1843 年得到的結果。

解法(2):矩陣的應用

因為$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$,

,所以$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$

假設 A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,剩下來的問題就是如何計算 $A^n$ 了,這是線性代數的基本問題,理論方面每一本線性代數的書都可以找到,因此這裡只把結果寫下來。

1. 先求A的固有值,即解$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$的兩根,解得$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

2. 求對應的固有向量$\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

3. 找到一個矩陣 T=$\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,使得 $T^{-1}AT=U=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$,

   ,其中 $T^{-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

4. 所以 $A=TUT^{-1}$,$A^n=(TUT^{-1})^n=TU^nT^{-1}$,就可以求 $a_n$=

解法(3)生成函數法

令 $g(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots+a_{n+2}x^{n+2}+\ldots$(1),其中 $a_n$ 就是費氏數列的第 n 項,則

$xg(x)= a_1x^2+a_2x^3+a_3x^4+\ldots+a_{n+1}x^{n+2}+\ldots$(2)

$x^2g(x)= a_1x^3+a_2x^4+\ldots+a_nx^{n+2}+\ldots\ldots$(3)

(1)-(2)-(3),注意到 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$,所以$(1-x-x^2)g(x)=x$

所以 g(x)= $\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{A}{1-\alpha x}+\frac{B}{1-\beta x}$，$\alpha,\beta$ 是 $x^2-x-1=0$ 的兩根，設 $\alpha>\beta$，則

$x=A(1-\beta x)+B(1-\alpha x)$，$\begin{cases} A+B=0 \\ \beta A+\alpha B=-1 \end{cases}$，則 A= $\frac{1}{\sqrt{5}}$，B= $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ 所以

g(x)= $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{1-\alpha x}-\frac{1}{1-\beta x})=\frac{1}{\sqrt{5}}[(1+\alpha x+\alpha^2x^2+...)-(1+\beta x+\beta^2x^2+...)]$

其中 $x^n$ 項的係數即為 $a_n$，所以 $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$

◇習作◇

1. $a_1=1$，$a_n=\frac{n-2}{n}a_{n-1}+\frac{1}{n}$，求 $a_n=$
2. $a_1=1$，$a_2=11$，$a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n$ 求 $a_n=$
3. 數列 $\langle a_n\rangle$，$\langle b_n\rangle$ 滿足 $a_1=b_1=1$，$a_n=a_{n-1}-2b_{n-1}$，$b_n=a_{n-1}+4b_{n-1}$，求 $a_n=?$ $b_n=?$
4. $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2n-1$，求 $a_n=$

◇解答◇

(2) $3^n+2(-1)^n$　　(3) $a_n=-3^n+2^{n+1}$，$b_n=3^n-2^n$　　(4) $a_n=2\times3^{n-1}-n$

1. 定義 $b_0=0$，$b_1=1$，$b_{n+2}=b_{n+1}+b_n+a_n$，其中 $a_n$ 是費氏數列，試用 $a_n$，$a_{n+1}$ 表示 $b_n$（$\langle b_n\rangle$ 稱為 second order 費氏數列），證明 $(a_n,a_{n+1})=1$
2. 試證 $a_{4n}$ 是 3 的倍數
3. 試證 $a_1+a_3+a_5+...+a_{2n-1}=a_{2n}$
4. 試證 $a_n<(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$
5. 若 $a_n=n$，$n=?$
6. 若 $a_n=n^2$，$n=?$
7. 除了一個例外，"若 n 不是質數，則 $a_n$ 不是質數"，求出此例外，並證明其他成立的情形
8. $a_{k-1}^2+a_k^2=a_{2k-1}$

9. 等比數列<$a_n$>, $a_1=1$, $a_4=2-\sqrt{5}$, 且 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$, 則公比=

10. $F_0=F_1=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}F_n$ 試證 $F_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}$ 中山大學雙週一題

96/09/21~96/10/05

---

最近一位 MSRI (Mathematical Sciences Research Institute) 的年輕電腦科學家 Divakar Viswanath 發現一個新的數學常數, 使得費氏數列重現新聞, 並且顯示了兔子與數字 1.13198824...之間的關聯 .

假設你是這樣產生費氏數列的, 在每一個步驟擲一個銅板, 如果出現正面就把第 n 項加第 n+1 項得到第 n+2 項, 如果出現反面就用減的.

例如:

1,1,2(H),3(H),-1(T),4(T),-5(T),-1(H),或

1,1,0(T),1(H),-1(T),2(T),1(H),1(T),

有時候正負變化會很大

1,1,2,3,5,8,13,21,-8,13,-21,…

也有可能產生特別的模式:

1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,...或

1,1,0,1,-1,0,-1,1,0,1,-1,...

如果你的銅板每次都得到正面, 你就得到原來的費氏數列

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,...

如此多變的行為, 所產生的數列並不顯然會有如原來的費氏數列一樣會有很好的成長模式.

但是,去年秋天剛完成紐約 Cornell 大學計算機科學 Ph.D.的 Viswanath 證明在隨機費氏數列的第 n 個數的絕對值近乎等於 1.13198824...的 n 次方

實際上並不是非常精確.因為數列是隨機產生的,有無限多種可能性..Viswanath 證明,得到 1.13198824 的機率=1

Viswanath 的結果終結了 1960 年的一個謎題。那一年,Hillel Furstenberg 與 Harry Kesten 證明包括隨機費氏數列,一般隨機產生的數列其第 n 項得絕對值趨近於某一個常數 K 的 n 次方的機率=1。Viswanath 找到了這個常數 K。

Viswanath 的論文已經被 Mathematics of Computation 雜誌接受。他的 email address 是 divakar@msri.org

- Keith Devlin(笛卡爾,拜拜的作者)本文節譯自 Devlin Angle

---

§04 延伸閱讀:


1. 斐波那契數列----------九章出版社(吳振奎)
2. 大自然的數學遊戲----------天下文化(Ian Stewart) p.183
3. 數學傳播季刊----------第 7 卷第 1 期(楊維哲)
4. The Art of Computer Programming--台北圖書(D.E.Knuth) p.78
5. 具體數學----------格致圖書公司 p.316
6. 希爾伯特的第十問題----------九章出版社 p.35
7. 生物世界的數學遊戲----------天下文化 Ian Stewart
8. 用生成函數法求 $1^2+2^2+3^2+...+n^2$=傳播季刊第 22 卷第 4 期 蔡聰明)
9. 蔡聰明先生談費氏數列(1),費氏數列(2)
10. 賴東昇先生談費氏數列
11. 費氏數列與黃金比例: (1)費氏數列與黃金比例(2)自然界的費氏數列 (3)Fibonacci WebQuest (4) 黃金比例

12. Fibonacci Number(1)　Fibonacci Number(2)

---

科展的數列

1. 挑剔數列　2.外觀數列　3.棋盤上的費氏數列

---

1. 1202 年 Fibonacci 在他的書 Liber Abbaci 中的習題:兔子出生以後兩個月就能生小兔子,若每次恰好生一對(一雌一雄),如果養了一對初生的兔子,則一年後共有幾隻兔 子?(假設生下的兔子都不死)
2. 1611 年 Kepler:研究葉序(phyllotaxis)中的費氏數列
3. 1844 年 G.Lame:輾轉相除法(Euclid's algorithm)的步數(輾轉相除的次數)不大於較小的那個數的位數的 5 倍
4. 1876 年 E.Lucas:得到費氏數列許多深入的結論,其中之一是,$2^{127}-1$ 是質數
5. 歐氏對局(R.E.Gaskell,M.J.Whinihan)