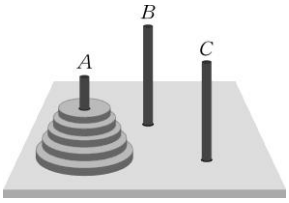
§ 緣起

婆羅疒疒斯國(今印度北部瓦臘納西(Varanasi)，靠近尼泊爾)方圓四千多里，居民大多信奉外道，少數人敬信佛法。從婆羅疒疒河向東走十多里，就到了鹿野苑，是釋迦牟尼佛初轉法輪的地方。寺院內精舍西南有一座石塔，塔前有無憂王石柱，石柱旁邊不遠處有座佛塔，是當初阿若憍陳如等五人見如來放棄苦行，便不再侍衛如來而來這裡自己修行的地方。旁邊還有三座塔，有過去三佛安坐和散步的遺跡。(參考資料 1)

維斯瓦納特(Kashi Vishwanath)是印度濕婆神(大自在天)的寺廟，位於瓦臘納西。廟裡面有一個很大的房間，裡面有 3 根柱子，旁邊放了 64 個金屬圓盤。依照下列規則移動圓盤：



有 A,B,C 三柱，其中 A 柱上套著 n 個大小不同的圓盤，將其由小到大圓盤編號為 1，2，……, n。若藉助 A、B、C 三柱作橋樑，且每次移動圓盤時都保持較大圓盤在下面，較小圓盤放在上面的規定，將 A 柱的圓盤全部移動到 C 柱。

一旦工作完成，這個世界終將結束。

假設移動一個圓盤需要 1 分鐘，則 64 個圓盤依照上述規則，由 A 柱全部移動的 C 柱需要多少時間？世界何時毀滅？

以上所述，盧卡斯(Édouard Lucas 1842~1891)在 1887 年把它寫成一個趣味數學遊戲(8 個圓盤的情形)又稱為河內(Hanoi)塔問題。

(註:盧卡斯對費氏數列也很有研究，請看參考資料 3，二階線性遞歸關係)

§ 問題轉化

設 a_n 表示將 n 個圓盤全部由 A 柱搬到 C 柱所需的最少次數，試求$\langle a_n \rangle$的遞迴關係式，並求 a_n=

因為河內塔問題課堂上都會教到，所以得到遞迴關係的過程就不再贅述。

$a_1=1$，$a_n=2a_{n-1}+1$

§ 求解

解 1:

製造一個公比=2 的新數列<a_n-c>，其中 c 是一個常數

$a_{n+1}-c=2(a_n-c)$，和原式比較，得 c=-1

即我們產生一個公比=2 的新數列<a_n+1>，所以 $a_n+1=(1+1)\cdot 2^{n-1}$

得 $a_n=2^n-1$

因為產生的新數列為等比數列，我遂自告奮勇，把原數列叫做"準等比數列 "。(註:眼尖的學生看出 c=-1 是 x=2x+1 的解，這可不是巧合。)

但是，產生新數列的過程常使學生感到突兀，一位衛道中學的同事強烈建議我這樣教:

解 2:

$a_1=1$

$a_2=2+1$

$a_3=2(2+1)+1=2^2+2+1$

$a_4=2(2^2+2+1)+1=2^3+2^2+2+1$

...找到規律性

所以 $a_n=2^{n-1}+2^n+...+2+1=2^n-1$

這樣做一般學生應該可以掌握。

如果時間允許，我兩種方法都會教。我發現，程度較好的學生傾向於第一種解法。這應該是數學成熟度的問題，第一種解法比較抽象。不知道根據數學方法論如何解釋。

深入地說，第二種解法 a_4-->a_n 的過程其實是一個"猜想"，然後引入數學歸納法，這是"證明"的部分。這樣就很完美了!這就印證了 Paul Erdös 說的:生命的意義在猜想與證明。

§ 費氏數列

$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ 稱為費氏數列。

費氏數列一般項的求法就我所知至少有 3 種，(1)矩陣(2)生成函數(3)製造新數列 等等，都超出目前高中課程。

以下介紹製造新數列的方法。

對於費氏數列，如果存在 α,β ，使得 $(a_{n+2}-\alpha a_{n+1})=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ ，則 $\alpha+\beta=1,\alpha\beta=-1$，$\alpha,\beta$ 是 $x^2-x-1=0$ 的兩根，則 $<a_{n+1}-\alpha a_n>$ 是一個公比為 β 的等比數列，於是 $a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}$ ，這樣的數列有必要研究一下。

[引理]

數列 $<a_n>$，滿足 $a_{n+1}+pa_n+qr^n=0$，則存在常數 A、B，使得 $a_{n+1}=A(-p)^n+Br^n$

證明

$a_{n+1}+pa_n+qr^n=0$.....(1)

$a_n+pa_{n-1}+qr^{n-1}=0$....(2)

(1)-r(2)得 $(a_{n+1}-ra_n)+p(a_n-ra_{n-1})=0$

所以 $<a_n-ra_{n-1}>$ 是一個公比=-p 的等比數列

$a_{n+1}-ra_n=(a_2-ra_1)(-p)^{n-1}$...(3)

$a_{n+1}+pa_n=-qr^n$.....(4)，$(3)\times p+(4)\times r$，得

$(p+r)a_{n+1}=-(a_2-ra_1)(-p)^n-qr^{n+1}$，取 $A=\dfrac{ra_1-a_2}{p+r}$ ，$B=-\dfrac{qr}{p+r}$ ，則

$a_{n+1}=A(-p)^n+Br^n$

由此引理，費氏數列 $<a_n>$ 滿足 $a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}$ ，所以 $a_n=A\alpha^n+B\beta^n$

取$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，因為 $a_1=a_2=1$，取 n=1、2 代入，則

$$\begin{cases} A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})+B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})=1 \\ A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2+B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2=1 \end{cases}$$，解得 $A=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$B=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

所以費氏數列的一般項$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$，這是雅克・比奈(Jacques Binet 1786~1856)於 1843 年得到的結果。

§ 分式線性關係的不動點解法

台中一中 101 學年度第一次教師甄試考了這樣一到題目:

設數列$\langle a_n\rangle$滿足 $a_1=2$ 且$a_n=\frac{2a_{n-1}+1}{a_{n-1}+2}$，$\forall n\geq 2$，求一般項 $a_n=$(以 n 表示)

解 1 作歸納性的猜測

$a_1=2$, $a_2=\frac{5}{4}$, $a_3=\frac{14}{13}$, $a_4=\frac{41}{40}$, …

令 $b_1=1$，$b_2=4$，$b_3=13$，$b_4=40$, …, 則 $b_n-b_{n-1}=3^{n-1}$

$b_n=1+3+3^2+\ldots+3^{n-1}=\frac{1}{2}(3^n-1)$, 所以$a_n=\frac{\frac{1}{2}(3^n-1)+1}{\frac{1}{2}(3^n-1)}=\frac{3^n+1}{3^n-1}$

再用數學歸納法證明，此處省略。

解 2 不動點解法

也是源自"製造新數列"的想法。

是否存在α,β,λ, 使得$\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\lambda(\frac{a_{n-1}-\alpha}{a_{n-1}-\beta})$，在$\lim_{n\to\infty}a_n$存在的條件下答案是肯定的，且$\alpha,\beta$是$x=\frac{2x+1}{x+2}$的兩根。

若$\lim_{n\to\infty}a_n$存在，假設$\lim_{n\to\infty}a_n=x$，則 x 滿足$x=\frac{2x+1}{x+2}$，其兩根α,β稱為原數列的不動點，今解得不動點 $x=\pm 1$。

$\frac{a_n-1}{a_n+1}=\lambda(\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}+1})$，求$\lambda$

$a_n - 1 = \dfrac{2a_{n-1}+1}{a_{n-1}+2} - 1 = \dfrac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}+2}$ ...(1)

$a_n + 1 = \dfrac{2a_{n-1}+1}{a_{n-1}+2} + 1 = \dfrac{3a_{n-1}+3}{a_{n-1}+2}$ ...(2)，(1)除以(2)得 $\lambda = \dfrac{1}{3}$

所以 $\dfrac{a_n - 1}{a_n + 1} = \dfrac{2-1}{2+1} \times (\dfrac{1}{3})^{n-1}$，可解得 $a_n = \dfrac{3^n + 1}{3^n - 1}$

§ 結語

我同學陳文進教授專長是演算法，目前任教於台大資工，他非常喜歡「具體數學」這本書，在台大教了很多年。這本書開宗明義第一章就是遞迴數列。

1931 年哥德爾(K.Gödel)利用了所謂的”原始遞迴函數”的概念證明了不完備定理，這個定理除了使得希爾伯特(D.Hilbert1862~1943)的形式論學派的夢想破滅之外，也直接影響了計算機科學的理論。因此，近代數理邏輯為除了集合論、模型論、證明理論之外，還有遞迴理論。

遞迴理論在計算機科學中非常重要。

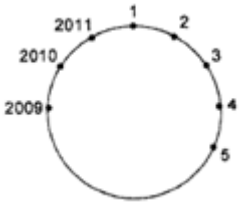
我們在求遞迴數列的一般項過程中學得許多方法，這是數學學習的精神所在，也是我寫這篇文章的動機之一。在解河內塔問題中的遞迴數列時，我的同事強烈建議我不要用”製造新數列”的方法，其實我並不贊同，但是「心事誰人知」呢!?寫這篇文章剛好可以借題抒發一下，我們由本文可以看到”製造新數列”其實是一個重要的發法。

至於世界何時終止大部分人不會在意吧!

§ 習作

1. 平面上 n 條線最多可分割出多少個區域?史坦那(Jacob steiner 1796~1863)1826 年提出來的問題。
2. 有 n 位女士坐成一排,然後 n 位女士全部起立再重新入座,而每位女士可選擇自己之前的座位或是之前她前後位置的座位,試問這 n 位女士有多少種入座的方式?(中山大學應數系雙週一題 99 學年度第 2 學期)

3. 將自然數 1 到 2011 按順時中方向依序排列在一個圓圈上,從 1 開始依順時鐘方向,保留 1,擦掉 2;保留 3,擦掉 4;保留 5,擦掉 6;…,如此每隔一個數擦掉一個數,一直循環下去,當最後剩下一個數時,剩下的數是___(台中一中 100 年科學班推甄試題)



4. $a_1=0, a_2=1, a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=1$,求 a_{103}=

5. $a_1=1, a_2=2, a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n+3$,求 a_n

§ 解答

1. $a_1=2, a_n=a_{n-1}+n$(詳解略)

2. 假設 n 位女士入座的方式有 f(n)種,則有 n+2 位女士時,第一位女士不動或到第二位時;當她(第一位女士)不動時,後面 n+1 位女士有 f(n+1)種方法,當她(第一位女士)到第二位時第二位女士要排到第一位,後面剩下 n 位女士

所以 f(n+2)=f(n+1)+f(n),又 f(1)=1,f(2)=2

後面的解法就與"費氏數列"解法相同了。

解得 $f(n)=(\frac{5+\sqrt{5}}{10})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+(\frac{5-\sqrt{5}}{10})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

或參考 http://www.math.nsysu.edu.tw/~problem/

3. 這是約瑟夫(Titus Flavius Josephus)問題改寫。

請看參考資料(4),p.9~12

遞迴式為 J(1)=1,J(2n)=2J(n)-1,J(2n+1)=2J(n)+1, $n\geq 1$

遞迴式的解為 $J(2^m+l)=2l+1$, $m\geq 0$ 且 $0\leq l<2^m$

所以 J(2011)=J(2^{10}+987)=$2\times 987+1$=1975 這是答案。

4. 製造新數列<$a_{n+1}-a_n$>,解得 a_{103}=5253

5. 設 $(a_{n+2}+k)=(a_{n+1}+k)+2(a_n+k)$,則 k=$\frac{3}{2}$,製造一個新數列 $b_n=a_n+\frac{3}{2}$

§ 參考資料

1. 大唐西域記 商周出版 p.144

2. 數學傳播季刊第 23 卷第 4 期 數學方法論與新世紀數學

http://w3.math.sinica.edu.tw/media/media.jsp?voln=234

3. 數學傳播季刊第 28 卷第 1 期 遞歸數列與不動點

http://w3.math.sinica.edu.tw/media/media.jsp?voln=281

4. 利用生成函數解遞迴數列　數學傳播季刊第 32 卷第 3 期

http://w3.math.sinica.edu.tw/math_media/d323/32302.pdf

5. 具體數學(Donald Knuth 等著) 格致圖書公司 陳衍文 譯

6. 約瑟夫問題 http://en.wikipedia.org/wiki/Josephus_problem

7. 九連環

http://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B9%9D%E9%80%A3%E7%92%B0

8. Martin Gardner 趣味數學 p.62

http://ishare.iask.sina.com.cn/f/9697880.html