§ 楔子

10 幾年前，我有一個數學向來不錯的學生，他參加數學系甄。據說當時教授問他:為什麼$\frac{7}{23}$一定可以化為循環小數？

這基本的數學原理課本不提，考試不考，老師當然不教，於是他被打敗了!

那些年，有一本熱賣書籍叫聖經密碼，作者 Michael Drosnin 把某一版本的聖經用電腦每隔幾個字母選取一個後排成一列，叫做等距密碼。

結果發現許多諸如"拉賓遇刺"這樣的句子。Drosnin 在這本書裡宣稱:上帝在聖經裡預警了幾千年後的災難。言之鑿鑿，似有所本，真教人害怕。

培根說:所謂預言家，就是事後能解釋為什麼預言沒有實現。

那麼，到底所謂聖經密碼是怎麼一回事

§ 鴿籠原理

我們用一個淺顯的釋例說明鴿龍原理:"7 隻鴿子飛回鴿籠,如果鴿籠只有 6 個,則會有一個籠子裡至少有兩隻鴿子。"

鴿籠原理也稱為抽屜原理或 Dirichlet 原理(P.G.L.Dirichlet 1805-1859)，比較數學化的說法是這樣的:若把 kn+1 個物件放入 n 個盒子，那麼一定有一個盒子中至少有 k+1 個物件。

我們先看第一個故事。

為什麼$\frac{7}{23}$一定可以化為循環小數？

根據除法原理:被除數=除數×商+餘數

因為餘數一定小於除數，所以你把 7 除以 23，多除幾次，就 23 次吧。

假如餘數都不相同，則餘數是 1,2,3,...22。但是鴿籠原理說，這是不可能的，其中一定至少有兩個餘數相同。(就是說,現在你把 23 隻鴿子飛回 22 個籠子)

餘數相同的地方就產生循環!因此，$\frac{7}{23}$一定可以化為循環小數。

如果我們"認定"有限小數也是一種循環小數，則我們可以說所有的分數都是循環小數，所有的循環小數都是分數。

§ 鴿籠原理的推廣

第二個故事跟 Ramsey 定理有關。

在平面上隨便畫 5 個點，任 3 點不共線，則其中一定會有 4 個點形成一凸 4 邊形。這是匈牙利數學家 Paul Erdös 小時候玩的遊戲。

1935 年，他和 George Szekeres 證明了只要點數夠多，就可以找到任意的凸 n 邊形，並且發現他的定理只不過是 Ramsey 定理的特例。

Ramsey 定理說："不可能完全無序"。意思就是說，只要點數夠多，我們就可以在裡面"看出"有意義的圖像。所以你可以在夜空中看到各種星座。同理,叫一隻猩猩在打字機上亂打，只要字母夠長，你可以找到有意義的句子。

Drosnin 用電腦做所謂等距密碼，其實道理是一樣的。

換句話說，你用其它書也可以找到"密碼"，例如莎士比亞全集或白鯨記。

§ 何謂 Ramsey 定理?

集合 S 的子集 T 若有 m 個元素，稱 T 為 S 的 m-子集。

將 S 中的 m-子集分為 $S_1, S_2, \ldots, S_t$ 等互不相交的 t 類，任意給定不小於 m 的 t 個整數 $q_1, q_2, \ldots, q_t$,一定可以找到一個最小整數 $N(q_1, q_2, \ldots, q_t; m)$，只要 S 的元素個數 $n \geq N(q_1, q_2, \ldots, q_t; m)$，則 S 中必定有一子集 T，其元素個數為某一個 q_k,且所有 T 的 m-子集都屬於 S_k

拉姆西(Frank Plumpton Ramsey 1903~1930)是一個非常聰明的英國數學家,不幸年青早逝。

Ramsey 定理的數學形式很抽象，他本人倒是舉了一個有名的例子:世界上任意 6 個人中，總有 3 個人相互認識，或互相皆不認識。(習作 6)

§ 無用之用

數學有甚麼用？這是許多人的疑問。

另一方面，許多數學營喜歡把鴿籠原理當作一個主題。這兩者之間的平衡點在哪裡?我想舉一個故事,也許值得參考。

1999 年，我當數學科召集人。我拿「建中通訊徵答」給學生做，當作校內有獎徵答。

其中有一題如下：

坐標平面上有相異的 10 個點，其中沒有三點在同一條直線上，每一點均為格子點，試證明這 10 個點兩兩之間的連接線段中，必有一個異於這 10 個點的格子點。(點 A 為格子點的意思，就是點 A 坐標(m,n)中，m,n 均為整數)(中學生通訊解題第三期 88301)

因為 10 個點坐標均為格子點，根據整數的奇偶性來分類，可分為(奇,偶)、(偶,奇)、(奇,奇)、(偶,偶)四個情形，故必有二個頂點的坐標其奇偶性一樣，設這兩個點為 A,B，則線段 $\overline{AB}$ 的中點 M 必為格子點，因為 10 點中任 3 點不共線，所以 M 必異於這 10 點。

這一題有兩個學生做對，其中一個是高一的學生，後來進了台大醫學系。

我的意思是說：所謂”無用”的數學中所表現的”數學成熟度”，或者說”抽象能力”，其實是人類智力的重要因素。

鴿籠原理有許多極具挑戰性的習作，因此也受到一些數學營的青睞。

§ 後記

李國偉先生在"一條畫不清的界線"一書中闡述:在科學與偽科學之間畫一條清楚的界線不是一件容易的事。

<u>聖經密碼</u>一書是偽科學，可由 Ramsey 定理破解。那麼，最近電視上名嘴對於宋楚瑜先生明年參選總統的種種預言，誰來破解呢?

Ramsey 定理是鴿籠原理的推廣，這是組合學的範疇。可別小看了組合學，李國偉先生先專攻數理邏輯，後來轉攻組合學，使台灣成為一個堅強的組合學研究團隊而揚名國際。

§ 習作

1. 將 9 個正整數 $a_1, a_2, ... a_9$ 重排成為 $b_1, b_2, \ldots b_9$，則 $(a_1-b_1)(a_2-b_2)\ldots(a_9-b_9)$ 必為偶數(數學的發現趣談 p.028)
2. 任給 7 個相異整數，求證其中必有 2 數，其和或差是 10 的倍數。
3. 在邊長=1 的正方形內任取 5 個點，試證至少有兩個點的距離小於或等於 $\frac{1}{\sqrt{2}}$
4. 從 1 到 100 的正整數中任取 51 個數，則其中會有 1 個數是另外 1 個數的倍數(然後改成從 1 到 2n 的正整數中任取 n+1 個數)
5. 有一袋糖果隨意分給 15 個小孩,每個小孩至少分到 1 個，證明其中必有一些小孩所得的糖果數之和為 15 的倍數(通訊解題)
6. 在一圓上取 6 個點,在每兩點間作連線段，如果把每個線段任意地塗成咖啡色或藍色，則有一個三角形，它的三邊同色。世界上任意 6 個人中，總有 3 個人相互認識，或互相皆不認識。
7. 在前 n^2+1 個自然數中,至少必定有 n+1 個是有序的(由小到大,或由大到小)(Paul Erdös 1913~1996)，例如把 1,2,3,4,5 作任意重排，則其中至少有 3 個數是遞增或遞減(例如排成 1,4,5,3,2 則 1,4,5 是遞增)。
8. 設 m 是任一偶數，m 個整數 $a_1, a_2, ... a_m$ 滿足 $1 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_m \le ma_1+a_2+...+a_m=2m$。試證:一定可以把這 m 個數分成兩組，使得每一組的和都是 m。(抽屜原則及其他 p.66)
9. 對於任一實數 r，存在一分數 $\frac{p}{q}$，使得 $\left|r-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ (P.G.L.Dirichlet 原理)

◇解答◇

1. 如果$(a_1-b_1)(a_2-b_2)\ldots(a_9-b_9)$是奇數，則對 $i=1,\ldots,9$, a_i-b_i 是奇數，則 $a_1,a_2,\ldots a_9$ 中奇數與偶數個數一樣多，矛盾!

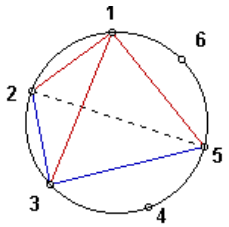
2. 考慮 $10k,\{10k+1,10k-1\},\ldots,\{10k+5,10k-5\}$, 6 個"巢"則至少有兩個數在同一巢

3. 把原正方形切成 4 個全等的小正方形

4. 1 到 100 之間奇數與偶數各有 50 個,把它們寫成 $a_i=2^m b_i$,其中若 a_i 是奇數,則 $m=0$;又 b_i 是 1,3,5,...99 裡面的數,今任取 51 個數,由鴿籠原理,存在兩個數長成 $2^m b_k$, $2^n b_k$ 的樣子,亦即此兩數有倍數關係

5. 假設 15 個小孩分得的糖果數為 x_i, $i=1\sim15$。令 $f(k)=x_1+x_2+\ldots+x_k$,考慮同餘類[1],[2],…,[14](如果某一 f(k)落在[0]內,則得證);由鴿籠原理,存在某兩個數 m,n,f(m),f(n)落在同一個籠子內,即 $f(m)\equiv f(n)(\mathrm{mod}15)$,假設 $m>n$,則 $x_{n+1}+\ldots+x_m$ 是 15 的倍數,得證。

6. 考慮由點 1 與其他 5 點所連之線段,因為有 5 個線段,由鴿籠原理至少會有 3 個線段同色(圖中之咖啡色),假設是 12,13,15;假設任 3 點所構成的Δ的邊皆不同色,所以 23 為藍色,同理,35 為藍色,則在考慮 25 時得到矛盾



7. 抽屜原理及其他,凡異出版社 p.14

8. 抽屜原則及其他,凡異出版社 p.66

9. 數學探奇 p.87

§ 參考資料

1. 抽屜原理及其他 p.97 凡異出版社

2. 數學傳播季刊第 1 卷第 4 期 組合學漫談(黃光明)

3. 數學傳播季刊 14 卷第 4 期 p.100

4. 數學傳播季刊 21 卷 3 期 p.63 棋盤染色問題與二部 Ramsey 數

5. 數學傳播季刊 28 卷 2 期 p.28 幸福結局問題–鴿籠原理與拉姆西定

理(張鎮華)

6. 通過問題學解題 p.97 九章出版社

7. 數學探奇 p.87 米蓋爾.德.古斯曼 著

8. 不只一點瘋狂 p.109

9. 數學的發現趣談 p.028 蔡聰明 教授 著

10. 科學教育月刊 第 232 期

11. 一條畫不清的界線,第 10 章 李國偉 著

12. 宴會問題 R(3,3)=6,R(4,4)=18,R(5,5)=?

13. 算術講義 http://math.ntnu.edu.tw/~maco/ 許志農教授