數學是研究模式的科學。史都華(Ian Stewart)在「大自然的數學遊戲」一書中傳達這樣的信念。(模式 pattern，或翻成「胚騰」。)

§001 楔子

1998 年 8 月，清大校園，炙熱的午後。

40 學分進修班每週例行的數學教育演講會將要進行，學員陸續進場，有的興高采烈，有的睡眼惺忪。許多人穿著短褲，連教授也不例外，雖然校園不乏大樹，但陽光太過毒辣。今天演講者是張海潮先生。

「各位同學有甚麼問題?」

以前的演講者就直接鋪陳了，甚至於投影片都來了。今天演講有點另類。

§002 疑問終於釋懷

陳之藩先生(1925~2012)在 1992 年 7 月份聯合報副刊發表「黃金分割為什麼美」一文(註 1)，表示「黃金分割所以美，美在對稱上，如果你用二進位來表示這個神祕數字，就會看得出來…」。

不久，又再同年 12 月份二十一世紀雜誌上發表「黃金分割也是對稱?」一文，把聯合報副刊中，「太極生兩儀，兩儀生四象，四象生八卦,…」的文字刪掉了。

二十一世紀雜誌在台灣發行的時間很短，剛好我有訂閱，因此一直存疑。

於是，我就這個疑問舉手發問。

張教授的回答就如同下列所述:(註 2)

> 回音壁・再談黃金分割／張海潮(台大數學系教授)
>
> 陳之藩先生七月十二日在聯副發表「黃金分割為什麼美」一文，文中的計算和論點卻引起台大數學系同仁的興趣，幾位同仁討論之後囑我務必寫一短文借聯副向讀者說明。…至於平移對稱：「陳文」指的是 0.618 的表式中一個 1 之後接著兩個 0 繼之以四個 1 而以八個 0 收尾，「陳文」說：「很好記：這是太極生兩儀，兩儀生四象，四象生八卦的次序。」遺憾的是陳先生計算錯了，這八個零絕不會連續出現，正確的答案是…【1992-09-01/聯合報/39 版/聯合副刊】

§003 如何用二進位法表示黃金比例

取 0.618 為例,因為 0.618<1

$$0.618 = a_1 \times \frac{1}{2} + a_2 \times (\frac{1}{2})^2 + a_3 \times (\frac{1}{2})^3 + \ldots$$,其中 $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \{0,1\}$

如右圖，每一個步驟乘以 2，如果個位數=1，則把 1 移除再乘以 2，方框中的數字就是 0.618 的二進位表示。

即 0.618=[1.0011110001…]二

$0.618 \times 2 = 1.236$

$0.236 \times 2 = 0.472$

$0.472 \times 2 = 0.944$

$0.944 \times 2 = 1.888$

$0.888 \times 2 = 1.776$

$0.776 \times 2 = 1.552$

$0.552 \times 2 = 1.104$

$0.104 \times 2 = 0.208$

因為以 0.618 估計 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，誤差太大，所以”八卦”沒多久就消失了。

應該很容易設計一個程式算出黃金比例的二進位法表示。

§004 一個無效的模式

在刻卜勒的時代，人們所知道的行星只有水星、金星、地球、火星、木星、土星等六個。

刻卜勒(Johannes Kepler 1571－1630)在提出令他永垂不朽的行星運動三大定律之前，一直思考一個問題：「為什麼太陽系有六個行星？而不是五個或七個、八個？」，他也一直好奇這些行星和太陽之間的距離為什麼是那樣？到底是遵循什麼規律呢？

有一天，他忽然間得到了靈感。

他想到了柏拉圖的多面體，克卜勒在 1596 年出版的「宇宙的奧秘」書中以柏拉圖多面體及以球的內接和外切 5 種正多面體來描述各行星與太陽距離的關係：

土星與木星間為正方體，木星與火星間是正四面體，火星與地球間是正十二面體，地球與金星間是正二十面體，金星與水星間是正八面體，每一正面體內接於外面那個行星所在的天球，而外切於裡面那個行星所在天球。

更巧的是，能夠滿足這樣內接外切特性的多面體，剛好就是六個，也就回答了太陽系為什麼剛好有六個行星這個困擾他很久的問題。

數術(numerology)是尋找模式最簡單的方法，因此也是最危險的。說它簡單是因為任何人都會，說它危險也是基於相同的理由。(大自然的數學遊戲 p.13)

道法自然。把數學跟宇宙聯結一直是人類的夢想，也許陳之藩先生只是跟刻普勒一樣犯了美麗的錯誤。

§005 模式的迷思

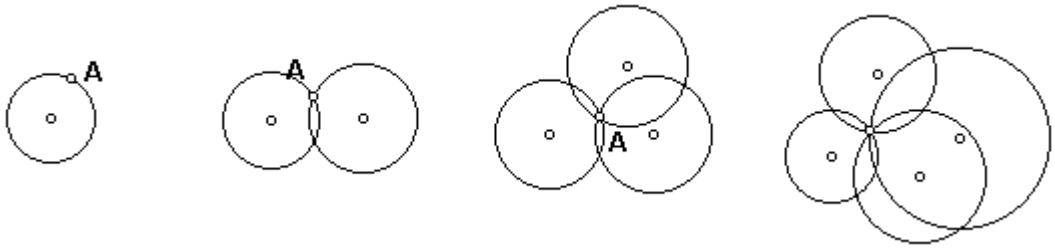
在中學任教，我們常看到類似這樣的考題:

2、3、5、7、□，則□=?

或者以下比較深刻的題目。

(甲)通過定點 A 的圓,最多把平面分成幾個區域?

這是一個遞迴求解的問題,也可以說是一個歸納的問題,通常我們是這樣解答的:



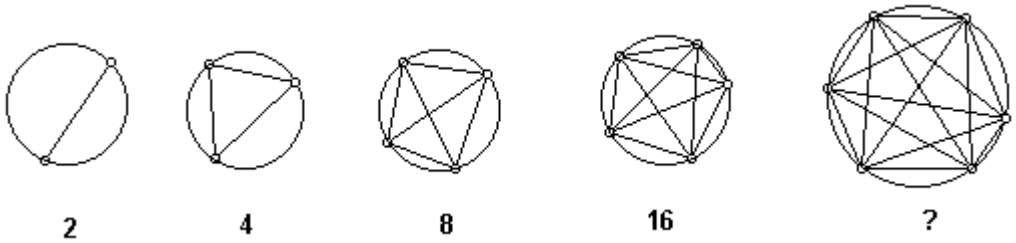
假設 a_n 表示 n 個通過 A 的圓所分割平面的最多區域數

則 $a_1=2$, $a_2=a_1+2$, $a_3=a_2+3$, $a_4=a_3+4$, $\cdots$, $a_n=a_{n-1}+n$

所以 $a_n=2+2+3+4+\cdots+n=\dfrac{n^2+n+2}{2}$

我們來看一個題目:

(乙)圓上有 n 個點,連接任兩點,如果任三條弦不共點,則這些弦把圓分成幾個區域?



由 $a_2=2$, $a_3=4$, $a_4=8$, $a_5=16$ 似乎 $a_6=32$ 但事實不然, $a_6=31$,事實上

$$a_n=C_0^n+C_2^n+C_4^n=\frac{1}{24}(n^4-6n^3+23n^2-18n+24)\text{，}$$

例如:n=6

(1) 先擺一個圓，內部有一個區域($C_0^6=1$)

(2) 每加入一條弦多一個區域，6 點任兩點決定一條弦，有 C_2^6 條弦。

(3) 弦的交點，每多一個點就多一個區域，6 點任 4 點決定一個弦交點，有 C_4^6 個點。

所以最大區域數=$C_0^6+C_2^6+C_4^6$。請看參考資料 12。

換句話說,(甲)題中 $a_n=a_{n-1}+n$ 可能只是"猜想"的部分,我們認定它有如此遞迴定義的模式也許是一種迷思!

中學生的考題不強調嚴密，無可厚非。但是類似「五行、對稱與黃金分割」這樣的命題就要很謹慎了。科學與偽科學有一條畫不清的界線，任何跨越界線的企圖都會受到嚴格的檢視。

§006 後記

1994 年二十一世紀雜誌第 26 期，蕭昌建先生「評<黃金分割也是對稱?>」一文對陳之藩先生有很嚴厲的批判。因此，陳之藩先生在 1995 年二十一世紀雜誌第 27 期「再談黃金分割」。把黃金分割與五行、節氣扯上了關係。

二十一世紀雜誌 2013 年 2 月號(135 期)王汝發先生發表「陳之藩:散文家與科學家」一文，極為推崇陳先生「左手數學右手散文的」的能力。

陳之藩先生已於 2012 年 2 月過世，關於黃金分割的論戰也結束了。

也許王汝發先生一文是紀念陳先生逝世周年。且也讓我興起寫這篇文章的念頭，如此因緣，也算了我多年來的一件心事。

§ 註與參考資料

1. 註 1: http://math1.ck.tp.edu.tw/石厚高/index.htm 大家談數學篇。
2. 註 2:張教授說聯合報沒有回應他們的"回音壁"，其實副刊是有發表刊誤的。(聯合報 1994/4/6 陳之藩:令人失眠的數。)
3. http://www.cuhk.edu.hk/ics/21c/二十一世紀雜誌 1992 年 12 月號。陳之藩
4. 大自然的數學遊戲(天下文化 Ian Stewart 著 葉李華譯)
5. 黃金比例 http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio
6. http://en.wikipedia.org/wiki/Phidias
7. http://blog.sina.com.cn/s/blog_6779f7920100hkwu.html 評黃金分割也是對稱。
8. http://web2.nmns.edu.tw/PubLib/NewsLetter/90/169/10.htm 刻卜勒與正多面體。
9. 一條劃不清的界線 李國偉 http://www.ios.sinica.edu.tw/ios/publish/3rd/lihkw.htm
10. http://math.pro/db/viewthread.php?tid=661&page=2#pid5274 這裡有 bugmens 先生許多寶貴資料。
11. http://w3.math.sinica.edu.tw/media/media.jsp?voln=163 數學傳播季刊第 16 卷第 3 期 王子俠。一組弦可將圓分成幾個區域？