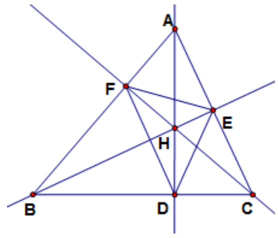
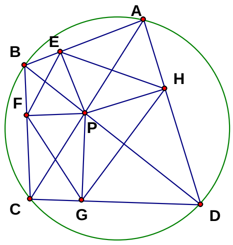
尋找垂心---抽象化與推廣的過程

§100 楔子



如何在銳角三角形的三邊上各找一點，作出周長最短的內接三角形？這個問題早有解答。

若 $\overline{AD},\overline{BE},\overline{CF}$ 是三角形的三高，H 是垂心，則 ΔDEF 即所求的周長最短的三角形。



武陵中學的「多邊形尋短」把這個問題推廣到四邊形，即尋找四邊形周長最短的內接四邊形，並且得到第一屆丘成桐中學數學獎首獎。

其中證明:圓的內接四邊形 ABCD 中，對角線交點 P 到各邊所作的垂足 E、F、G、H 所連成的四邊形是 ABCD 周長最短的內接四邊形。

2011 年 5 月中旬，凌晨 4 點多，我作了一個夢，我問自己，四邊形有沒有垂心?如果有，那麼有沒有尤拉線?

於是開始我尋找四邊形的垂心之旅。

我先把三角形的外心、重心、垂心的性質找出來。

§201 三角形外心 W 的性質

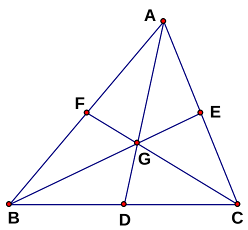
ΔABC 三邊中垂線交點 W 稱為ΔABC 的外心。

(1) $\overline{WA}=\overline{WB}=\overline{WC}$

(2) W 是ΔABC 外接圓的圓心

§202 三角形重心 G 的性質

ΔABC三中線的交點G稱為ΔABC的重心，則



(1) $\Delta ABG=\Delta BCG=\Delta ACG$ (面積)

(2) $\overline{AG}=2\overline{GD},\overline{BG}=2\overline{GE},\overline{CG}=2\overline{GF}$

(3) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

§203 三角形垂心 H 的性質

ΔABC 三高交點 H 稱為ΔABC 的垂心。

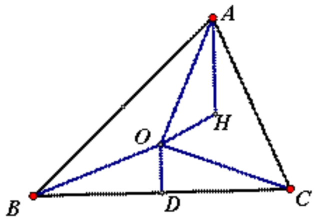
(1) 銳角三角形 ABC 的垂心 H 是以三個垂足 D、E、F 為頂點的三角形的內心。(當 ΔABC 是鈍角三角形時,H 在 ΔABC 外部,是 ΔDEF 的傍心。)

(2) $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}\Leftrightarrow$ H 是 ΔABC 的垂心。

(3) O 是 ΔABC 的外心,H 是 ΔABC 的垂心,則 $\overline{OH}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$

(4) 若 ΔABC 的頂點 ABC 都在曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上,則垂心 H 也會在曲線 $y=\dfrac{1}{x}$

(5) 三角形任一頂點到垂心的距離，等於外心到對邊的距離的 2 倍。即 ΔABC 的外心為 W，垂心為 H，D 為 $\overline{BC}$ 中點，則 $\overline{\mathrm{AH}}=2\overline{\mathrm{WD}}$。



(6)H、A、B、C 四點中任一點為其餘三點的三角形的垂心。

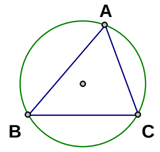
§3 尋求關聯性與推廣

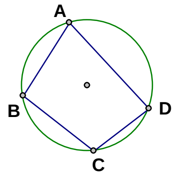
如果 H 是四邊形 ABCD 的垂心，那麼 H 必須滿足甚麼條件?

換句話說，我們要如何定義四邊形的垂心?

(1)從三角形推到四邊形,四邊形的重心 G,滿足 $\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}+\overline{GD}=\vec{0}$,有滿足物理質量中心的意義。

(2)三角形的外心是外接圓圓心,四邊形的外心是外接圓圓心，



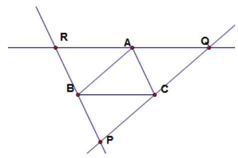


四邊形有外心的條件是對角互補。

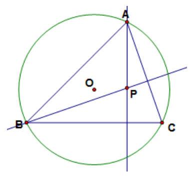
換言之，重心是以物理意義推廣，外心是以幾何意義推廣，

那麼垂心呢？

(3) ΔABC 中,分別過 A,B,C 作對邊的平行線,得 ΔPQR,則 ΔABC 的垂心是 ΔPQR 的外心。



(4) ΔABC 中,O 是外心,P 是垂心,則 $\overline{OP}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$



(3)(4)是我第一個找到的三角形外心與垂心的關聯性。但這似乎不構成從三角形推到四邊形的條件。

§4 上網搜尋

經過多日勞神苦思，我想也許該偷懶一下，上網找找看。

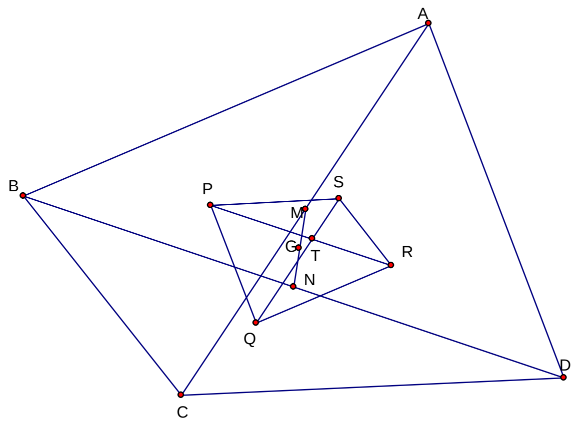
參考資料(4)「四邊形中一條精采的線」，Alexander Bogomolny 教授用一個巧思建構了(或者說定義)四邊形的垂心。

四邊形 ABCD 中，假設Δ ABC、Δ ABD、Δ ACD、Δ BCD 的垂心分別為 H_d、H_c、H_b、H_a，形成一個四邊形，此四邊形的對角線交點 H 就定義為四邊形 ABCD 的垂心。

同理，四邊形 ABCD 中，假設Δ ABC、Δ ABD、Δ ACD、Δ BCD 的外心分別為

W_d、W_c、W_b、W_a，形成一個四邊形，此四邊形的對角線交點 W 就定義為四邊形 ABCD 的外心。

四邊形 ABCD 中，假設Δ ABC、Δ ABD、Δ ACD、Δ BCD 的重心分別為 G_d、G_c、G_b、G_a，形成一個四邊形，此四邊形的對角線交點 G 就定義為四邊形 ABCD 的重心。(註:用 GSP 試驗一下，此處定義的重心與具有質量中心意義的重心不同。)



則 W、G、H 共線，且$\overline{GH} = 2\overline{GW}$。

§ 5 證明

§6 重新定義四邊形的外心

由以上論述，我們可以定義四邊形 ABCD 的垂心 H:

假設 ABCD 的外心 W，重心 G，定義 ABCD 的垂心 H 為滿足$\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{WG}$的點 H。

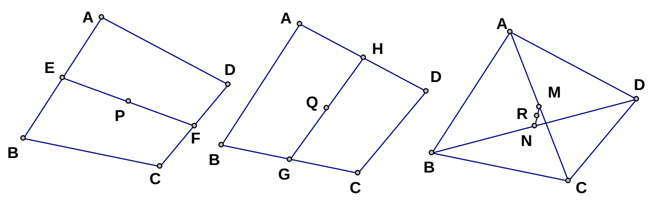
那麼是否有下列性質?

(1) $\overline{HA}\cdot\overline{HB} = \overline{HB}\cdot\overline{HC} = \overline{HC}\cdot\overline{HA}$=…

(2) W 是四邊形 ABCD 的外心,H 是四邊形 ABCD 的垂心,則$\overrightarrow{WH} = \overrightarrow{WA} + \overrightarrow{WB} + \overrightarrow{WC} + \overrightarrow{WD}$

§ 7 習作

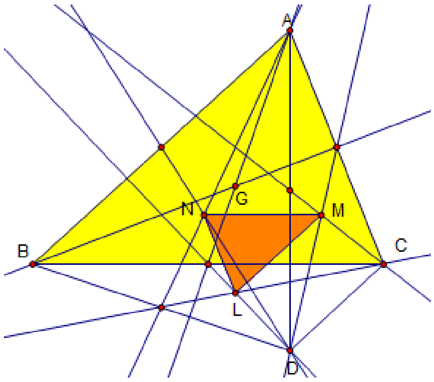
1. 四邊形 ABCD 中, 圖(1)中,E,F 是 $\overline{AB},\overline{CD}$ 中點,P 是 $\overline{EF}$ 中點;圖(2)中 G,H 是 $\overline{BC},\overline{AD}$ 中點,Q 是 $\overline{GH}$ 中點;圖(3)中,M,N 是 $\overline{AC},\overline{BD}$ 中點,R 是 $\overline{MN}$ 中點,試證 P、Q、R 是同一點。



(圖1) (圖2) (圖3)

2. ΔABC 中，O 是外心，P 是垂心，則$\overline{OP}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$

3. D 點與ΔABC共平面，假設ΔABD, ΔBCD, ΔACD的重心為 L、M、N，則$\frac{\Delta LMN}{\Delta ABC}=$



$\frac{1}{9}$

§8 參考資料

1. 第一屆丘成桐中學數學獎

   http://www.math.ntu.edu.tw/~shing_tung/yau_award/?page_id=133

2. 金柏林先生(Clark Kimberling1942~)三角形中心(ETC)內有古典與現代的各種心。

   http://faculty.evansville.edu/ck6/index.html,http://faculty.evansville.edu/ck6/tcenters/index.html

3. http://mathworld.wolfram.com/CyclicQuadrilateral.html
4. http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/EulerNagelInQuad.shtml
5. http://www.cut-the-knot.org/triangle/EulerLine.shtml
6. 幾何學的新探索(第一章)------凡異出版社(H.S.M.Coxeter＆S.L.Greitzer 著)

§9 後記

Alexander Bogomolny 教授在參考資料(4)中其實還有一個 9 點圓圓心 N。