

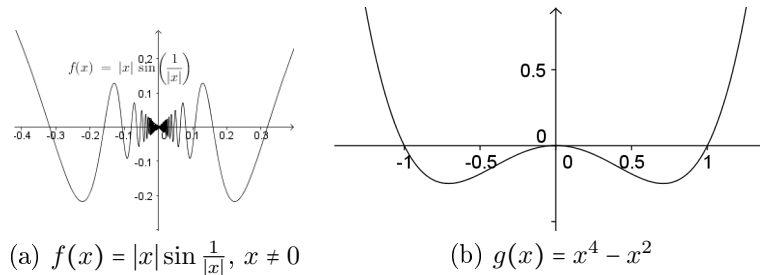
解法 1. 其中最大值之處理，推理有誤，最大值亦錯誤。

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{3}-x}+\sqrt{x-\frac{1}{5}}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)} \leq \frac{1}{15}, \text{ 此處並不能推理出 } x = \frac{4}{15} \text{ 時有最大值。}$$

解法 2. 單從函數圖形的對稱性，不能推理出是否有極值發生，例 $f(x) = \begin{cases} |x| \sin \frac{1}{|x|} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$,

圖形對稱於 $x = 0$ ，但 $x = 0$ 非極大、極小值。又如 $g(x) = x^4 - x^2$ ，其函數圖形，亦對稱於 $x = 0$ ，且 $x = 0$ 處唯局部的極大值，但非是最大值。

解法 2 中，已用到圖形對於遞增、遞減的正確性，也就是解法 4 微積分的範疇了。



另外以下補充 3 個解法：

解法 5. 令 $x = \frac{1}{5} + \frac{2}{15} \sin^2 \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ，則 $\sqrt{\frac{1}{3}-x} + \sqrt{x-\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{2}{15}}(\cos \theta + \sin \theta) = \frac{2}{\sqrt{15}} \sin(\theta + 45^\circ)$ 。

因此當 $\theta = 45^\circ$ ，即 $x = \frac{4}{15}$ 時， $f(x)$ 有最大值 $\frac{2}{\sqrt{15}}$ ； $\theta = 0^\circ$ 或 90° ， $f(x)$ 有最小值 $\sqrt{\frac{2}{15}}$ 。

以下兩解法僅處理最大值。

解法 6. 考慮柯西不等式 $\left[\left(\sqrt{\frac{1}{3}-x} \right)^2 + \left(\sqrt{x-\frac{1}{5}} \right)^2 \right] [1^2 + 1^2] \geq \left(\sqrt{\frac{1}{3}-x} + \sqrt{x-\frac{1}{5}} \right)^2$ 。

因此 $\sqrt{\frac{1}{3}-x} + \sqrt{x-\frac{1}{5}} \leq \sqrt{\frac{4}{15}}$ ，而等式成立時， $\sqrt{\frac{1}{3}-x} = \sqrt{x-\frac{1}{5}}$ ，即 $x = \frac{4}{15}$ ， $f(x)$ 有最大值 $\frac{2}{\sqrt{15}}$ 。

解法 7. 考慮 $y = \sqrt{x}, x \geq 0$ 之函數圖形凹口向下，因此有對任意實數 $a, b \geq 0$ $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\frac{a+b}{2}}$ ，且等號成立之條件為 $a = b$ 。

令 $a = \frac{1}{3} - x, b = x - \frac{1}{5}$ ，則 $\frac{\sqrt{\frac{1}{3}-x} + \sqrt{x-\frac{1}{5}}}{2} \leq \sqrt{\frac{1}{15}} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{3}-x} + \sqrt{x-\frac{1}{5}} \leq \frac{2}{\sqrt{15}}$ 。

而當 $a = b$ ，即 $x = \frac{4}{15}$ ，等式成立， $f(x)$ 有最大值 $\frac{2}{\sqrt{15}}$ 。