

§ 楔子

1974 年，午後，我在台大數學系圖書館準備還書。前面有一位少我半個頭的小朋友在還書，靈秀白皙。我偷瞄了一下，四本書中有兩本是：類比計算機原理、何謂實數。台灣的數學資優教育前輩當推楊維哲先生，這位小朋友就是楊柏因，如今在中央研究院資訊研究所，已經比我高一個頭，威猛英俊。

楊維哲先生常說：我今天要刮鬍子，因為要見蔣經國先生。楊先生是台灣數學資優生制度的催生者。

§ 遇見資優生

2002 年左右，上午，衛道中學。

上課中偶然心血來潮，想到 $3^2+4^2+12^2=13^2$ ，要學生多找幾個例子，使滿足 $x^2+y^2+z^2=t^2$ 。下課後，桌上擺了兩張紙，一張上面寫著：

$$y=x+1, z=x(x+1), t=x(x+1)+1$$

另一張紙上寫著：

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144$$

$$169, 196, 225, 289, 324, 361, 400, 441, 484$$

$$529, 576, 625$$

$$\text{所以有 } 2^2+10^2+11^2=15^2$$

$$8^2+9^2+12^2=17^2$$

$$1^2+4^2+8^2=9^2$$

$$4^2+5^2+20^2=21^2$$

前者由例子找出有規律的部分解，後者由演算直接找到一些解，對國三學生而言，實屬難得。這是 10 多年前的舊事，這兩位學生後來都進入一中資優班，然後進入醫學系。(說好的基礎科學就算了。)

§ 資優數學教育

1990 年代，數學資優教育也算如火如荼地展開一陣子了。這一天，大陸數學奧林匹克教練裘宗滬先生在台中一中開講：如何做奧林匹克訓練。(我禮貌地問了

一個問題：請問算幾不等式與柯西不等式等價嗎？裘先生似乎沒有會意過來，所以沒有回答。）

黃呈明老師也有一堂課，講一中如何訓練資優生，其中有一個辦法就是訓練學生「一題多解」，以訓練學生開放性思考與邏輯推理。我印象深刻。

如何推行數學資優教育？大家看法殊異，基本上，「資優生不是教出來的」是一個共識。

2012 年 4 月號科學美國人中文版中，張海潮先生認為「資優教育的重點不在於教材，而是培養學生自學的能力。」。我不完全贊同，好的演員當然需要好的劇本。

§ 一題多解

我前幾天大致做完武陵高中 101 年科學班試題，覺得還蠻平易的。

最近開始做一中科學班 101 年試題，有一個題目是這樣子的。

$f(x) = \sqrt{\frac{1}{3} - x} + \sqrt{x - \frac{1}{5}}$ 的最大值為 a ，最小值為 b ，則 $(a, b) =$

第一個反應是，天啊！考科學班要用到微積分？接著，我找到第一個解法，然後解法 2、解法 3，與諸位分享。

解法 1：算幾不等式

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{3} - x} + \sqrt{x - \frac{1}{5}}}{2} \geq \sqrt[4]{\left(\frac{1}{3} - x\right)\left(x - \frac{1}{5}\right)}$$

其中， $\left(\frac{1}{3} - x\right)\left(x - \frac{1}{5}\right) = -x^2 + \frac{8}{15}x - \frac{1}{15} = -\left(x - \frac{4}{15}\right)^2 + \frac{1}{225}$ 在 $x = \frac{4}{15}$ 有最大值

算幾不等式在 $\sqrt{\frac{1}{3} - x} = \sqrt{x - \frac{1}{5}}$ 時 " $=$ " 號成立，此時 x 也 $= \frac{4}{15}$ ，所以在 $x = \frac{4}{15}$ 時 $f(x)$

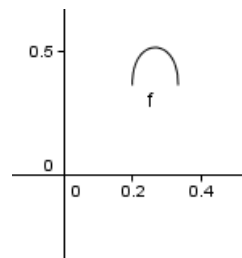
有最大值 $M = \frac{2}{\sqrt{15}}$ 。

在 $x = \frac{1}{3}$ 或 $x = \frac{1}{5}$ 時產生最小值 $m = \sqrt{\frac{2}{15}}$

（經讀者指正，此處有推理的錯誤。）

解法 2:

我用 Geogebra 作 $y = \sqrt{\frac{1}{3} - x} + \sqrt{x - \frac{1}{5}}$ 的圖形，發現它有對稱軸，應該是在 $x = \frac{4}{15}$ 的地方。



驗算一下：

$$f\left(\frac{8}{15} - x\right) = \sqrt{\frac{5}{15} - \left(\frac{8}{15} - x\right)} + \sqrt{\left(\frac{8}{15} - x\right) - \frac{3}{15}} = \sqrt{x - \frac{1}{5}} + \sqrt{\frac{1}{3} - x} = f(x), \text{ 果然如此,}$$

因此 $y = f(x)$ 在 $x = \frac{4}{15}$ 有最大值。最小值在 $x = \frac{1}{3}$ 或 $x = \frac{1}{5}$ 時產生。

(只是從函數 $f(x) = \sqrt{\frac{1}{3} - x} + \sqrt{x - \frac{1}{5}}$ "本身"的作圖推測, 倒沒有考慮一般性的數學理論。)

$$\text{解法 3: 考慮 } f(x)^2 = \frac{1}{3} - x + x - \frac{1}{5} + 2\sqrt{\left(\frac{1}{3} - x\right)\left(x - \frac{1}{5}\right)} = \frac{2}{15} + 2\sqrt{\left(\frac{1}{3} - x\right)\left(x - \frac{1}{5}\right)},$$

$$\left(\frac{1}{3} - x\right)\left(x - \frac{1}{5}\right) = -x^2 + \frac{8}{15}x - \frac{1}{15} \text{ 在 } x = \frac{4}{15} \text{ 時產生最大值, 所以 } f(x) \text{ 在 } x = \frac{4}{15} \text{ 時產}$$

$$\text{生最大值 } f\left(\frac{4}{15}\right) = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{4}{15}} + \sqrt{\frac{4}{15} - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{15}}$$

解法 4:

用微積分，是一般性的方法，就省略了。

§ 後記

1975 年，我與朱樺、林長壽先生上施拱星教授的「高等數論」，用的是蘇聯教材的英文版，施教授每個習題都自己做過，然後學生輪流上台解說。有一天，一個習題似乎條件不夠，做了很久，教授翻遍各種版本。最後發現日文版把習題的條件更正了。共產國家的高等數學教材質量並重與日本人的翻譯工夫令我印象深刻。施先生的親力親為也讓我深受感動。

我認為：資優生與自學能力等價，而好的教材是點燃其潛力的火種。那麼，我們的資優數學教材在哪裡？

§ 參考資料

1. 蔡聰明老師的「 $\sqrt{2}$ 是無理數的 28 種證明」數學傳播季刊第 23 卷 第 1 期
2. 國立高學大學應用數學系有資優數學講義

<http://www.math.nuk.edu.tw/senior/sindex.htm>

3. 算術講義(許志農教授)

<http://math.ntnu.edu.tw/~maco/arith.htm>

本文在高中電子報 69 期刊出後, 獲蘭陽女中陳敏皓老師回響, 提出另一個解法:
首先利用變換變數方式, 令

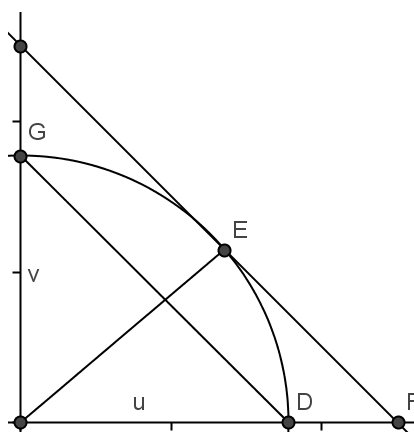
$$u = \sqrt{\frac{1}{3} - x} \geq 0, v = \sqrt{x - \frac{1}{5}} \geq 0, \text{ 平方後得}$$

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{3} - x + x - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}, \text{ 即將問題轉成}$$

$$f(x) = u + v, \text{ 而 } u^2 + v^2 = \frac{2}{15}, u \geq 0, v \geq 0, \text{ 圖形如}$$

右, 其中

$$D\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}, 0\right), G\left(0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\right), \overline{DG}: u + v = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}, \text{ 接著考}$$



慮直線與圓弧 $\widehat{GED}$ 的相交狀況, 得最小值為 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$, 此時, $u = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$ 或 $v = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$,

即 $x = \frac{1}{3}$ 或 $x = \frac{1}{5}$; 最大值則產生在相切時, 即 $E\left(\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right)$, 此時, 最大值為

$$u + v = \frac{1}{\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{2}{\sqrt{15}}, \text{ 得 } x = \frac{4}{15}。$$