

§1 楔子

古希臘人 Eulathlus 向 Protagoras 學習辯論術,先付一半學費,另一半學費訂定契約,言明等學成後,在第一場辯護勝訴時再付,如果敗訴,則學費不必再交。但 Eulathlus 畢業後,根本不擔任辯護的工作,自然也不交另一半的學費,因此 Protagoras 便告他。Protagoras 說:如果我勝訴,法官當然要判他還我學費;如果我敗訴,那就是 Eulathlus 勝訴,依契約,他還是要還我學費。

Eulathlus 說:如果我勝訴,當然是法官判我不必還學費,如果我敗訴,依契約我也不必還學費。

請問法官該怎麼判?

§2 歸謬證法

亞里斯多得認為:愈重的物體,落下得愈快。

1589 年,伽利略如此舉反證:把兩物 A、B 綁在一起,成為 A+B。假設 A 比 B 重,則由高處落下時,因為 B 落下的速度比 A 慢,把 A 拖住,所以 A+B 落下的速度比 A 慢;又 A+B 比 A 重,所以 A+B 落下的速度又比 A 快,矛盾。

所以"任何物體,同時從相同的高處落下,皆同時著地",伽利略如是說。

99 課程綱要把歸謬證法拿掉了,我猜想最少有兩位先生會很鬱卒。一位是歐幾里得先生,他在「幾何原本」中用歸謬證法證明了「質數有無窮多個」,另一位是蔡聰明先生,他用了 28 種方法證明了 $\sqrt{2}$ 是無理數。

§3 直觀與證明

最近看到一篇文章。關於 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明:

假設 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ 是有理數,其中 p, q 是正整數且 $(p, q)=1$,

則 $2 = \frac{p^2}{q^2}$,直觀上,「如果 $\frac{p}{q}$ 不是整數,則 $\frac{p^2}{q^2}$ 更不可能是整數。」矛盾,所以假設錯誤,即 $\sqrt{2}$ 時無理數,得證。

(這是因為,如果 p, q 沒有相同的成分, p^2 和 q^2 自然也不會有相同的成分;如

果 $\frac{p}{q}$ 都無法化簡成整數， $\frac{p^2}{q^2}$ 更沒有機會了。因此，這個式子是個明顯可笑的矛盾：等號左邊是整數，右邊不是整數。兩者怎麼可能相等？)

我想提一段陳年往事。

多年前，一次國中數學週考中，某老師出了一道題目：證明三角形兩邊和大於第三邊。

直觀上，這何需證明。因為兩點之間直線最短嘛！於是，我買了歐幾里得的幾何原本。根據歐幾里得的體系，證明「三角形兩邊和大於第三邊」確實需要很長的篇幅。

我相信這不會是出題老師的本意。我的判斷是出題老師只想要學生說明「兩點之間直線最短」。那麼，考題應該改成：請說明「三角形兩邊和大於第三邊」。

中學階段不必強調數學的嚴密性，這是共識(60年代的新數學過度強調嚴密性是失敗的原因之一)。但是直觀的說明與嚴格的證明應該予以區隔，這純屬我個人的看法。所以我以為上述關於 $\sqrt{2}$ 的證明實偏向於說明。

(註：最早項武義先生認為他解決了刻普勒的裝填問題，陳省身先生也為之背書。但是還是不被接受，目前公認是Thomas Hales解決了：

http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler_conjecture，數學界的所謂“證明”自有其行規。)

如何在高中引入簡易邏輯是一件困難但是是值得深思的事。

§4 等價

高中課程中另一個重要的邏輯概念是「等價」。

有一年，大學聯考考這麼一題，「證明海龍公式」：邊長 a 、 b 、 c 的三角形，面積 $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

那時候，大學錄取率大約 30% 不到，補習班之間競爭非常激烈，大家趕著把解答登報。有一間補習班第一天是這樣證明的：

因為 $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$, $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, 所以

$$\Delta = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}bc(2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}) = \dots = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

第二天，趕快發報更正。

因為在邏輯上，第一天拿一個等價的命題當作證明，等於沒有證明。換句話說，患了邏輯上的錯誤了。

§5 等價的一些例子

我們在國中時有這樣的性質

p: 三角形任兩邊和大於第三邊。又在書中的同一個角落看到 **q**: 三角形任兩邊差小於第三邊。

很容易證明 " $p \Leftrightarrow q$ " , 這種情形我們叫 **p** 與 **q** 等價, 意思是 **p** 與 **q** 是同一回事。

以下舉一些等價的例子:

1. **p**: 平行公設: 過直線外一點恰有一直線與之平行。

q: 三角形內角和為 180 度。

2. **G** 是 $\triangle ABC$ 的重心, 則 **p**, **q**, **r** 三個向量式等價

$$\mathbf{p}: \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\mathbf{q}: \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

$$\mathbf{r}: \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$$

3. **p**: $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2$ (柯西不等式), **q**: $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$ (三角不等式)

4. **p**: 周長固定的平面圖形中以圓形面積最大。**q**: 面積固定的平面圖形中以圓形周長最小。

5. (1) 正弦定理 (2) 餘弦定理 (3) 投影定理 等價

6. 實數的完備性有多種等價的敘述。(我有一位同事到師大數學系修碩士班學分就是上了一本這樣的書)

7. p : 算幾不等式。 q : Cauchy 不等式。

§6 算幾不等式與 Cauchy 不等式的等價

算幾不等式與Cauchy不等式在形式上相差很多，兩者會等價，甚感意外。我第一次是在台中一中的網頁內看到證明過程，當時沒有仔細研究，後來回去找就找不到那份資料了。最近上網搜尋，找到建中徐健策老師的一篇專題，算是一償宿願，這是我寫這篇文章的另一個因緣。

§7 後記

1900 年量子力學開始萌芽，到 1965 年朝永振一郎(S. Tomonaga)、薛文格(Julian Schwinger)與費因曼得到諾貝爾物理獎是一段精采的故事。

重點是薛文格與費曼對量子電動力學的看法與算法轅北轍，薛文格用的是歐洲優雅的數學，費因曼的路徑積分用的是圖像式的數學。把兩者結合為一，或者說，看出兩者的"等價性"的是戴森(Freeman J. Dyson)，我覺得這比證明兩命題的等價有更深刻的意義。

非歐幾何的發展也有類似的地方，義大利幾何學家Eugenio

Beltrami(1835-1899)證明了Lobachevsky(1793-1856)與Ferdinand Minding(1806-1885)的非歐幾何模型是"等價"的。

(註:代數中，複數平面與平面向量同構，已上兩種情況說同構或等價，哪一個說法比較恰當，當就教於各位。)

99 課程綱要把歸謬證法放在附錄，我觀察最近兩年的各校段考試題，大約只有 3、4 個學校段考中有考歸謬證法。

早年，國中考高中每年要考一題證明題，一題尺規作圖，當時，我們會努力教證明題，當然包括用「窮舉法」證明：「圓內接四邊形的充要條件為對角互補」。

基測不考證明題後，絕大部分的老師不會花時間去證明這個定理。

向來就是「考試引導教學」，自古皆然。隋唐時期科舉考要算經，所以宋朝有四位偉大的數學家：秦九韶、李治、楊輝、朱世傑。到明清科舉只考八股文，可以印證中國數學沒落的一段史實。

證明與數學的關係就如同實驗與物理的關係。基測與學測不考證明題，相信有不少人憂心忡忡，如今又把歸謬證法拿掉(放在附錄與拿掉等價)，應該有人輾轉難眠吧！

早上(2012/8/29)看到新聞。十二年國教將於後年上路，台大名譽教授劉廣定批評，一〇三年到一〇七年的高中學生，要繼續接受舊課綱的教育，他堅決反對沒有新課綱的十二年國教。後年就要推十二年國教，課綱最快一〇六年才能完成，到一〇八年才有新課綱教科書可用，意味之前的高中生，都要繼續接受舊課綱教育。

芬蘭從一九八〇年代開始教改，先找學校試辦，二〇〇〇年才全面實施；然而，台灣十二年國教從宣布到實施只三年準備期，讓人憂心。

§8 參考資料

1. 數學傳播季刊 23 卷 1 期($\sqrt{2}$ 是無理數的 28 種證明, 蔡聰明)
2. 邏輯與數學思維 王九達
3. 柯西不等式與排序不等式 p. 230-----上海教育出版社:由排序原理可推出包括平均值不等式, 柯西不等式等多個重要不等式。
4. 天才之旅 p. 61-----有幾個與平行公設等價的定理。
5. 宇宙波瀾(就是 Dyson 回憶錄)----- 天下文化
6. 宇宙的詩篇 p. 84-----天下文化
7. 非歐幾里得幾何學 p. 32-----水牛出版社
8. http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_03_2_07/page2.html中國數學史上的黃金時代及其四個偉大的數學家
9. <http://math1.ck.tp.edu.tw/%E5%BE%90%E5%81%A5%E7%AD%96/m>

[ath.htm](#) (徐健策老師專題)