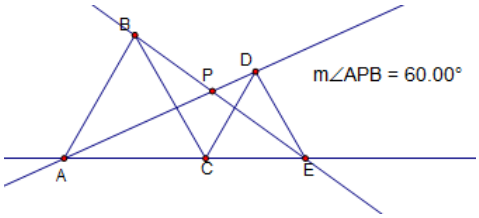
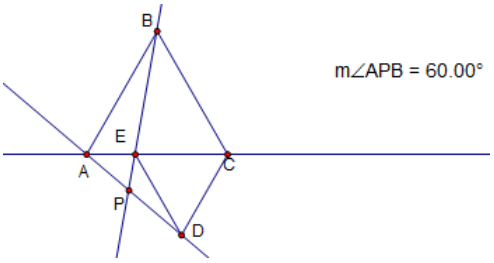
數學的發展是問題取向的，從發現問題到分析演算之間，GSP 提供實驗探索的工具，可印證想法，也可再引發問題。

§ 楔子





上面,左右兩個圖中,Δ ABC,Δ CDE 都是正三角形,直線 $\overleftrightarrow{AD},\overleftrightarrow{BE}$ 交於 P 點,則

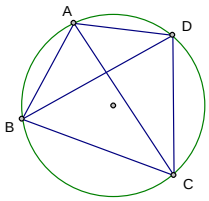
$\Delta ACD \cong \Delta BCE$,可以得到 $\angle APB = 60^0$ 是一個不變量。這是國中的一個基本題。這種狀況用 GSP 統一這兩個圖形並且看看在動態中能引發甚麼問題是 GSP 最擅長的事。

我追蹤 P 點的軌跡,發現 P 點的軌跡是一個圓形。於是,我繼續我的探尋之路…

§1 四點共圓的條件

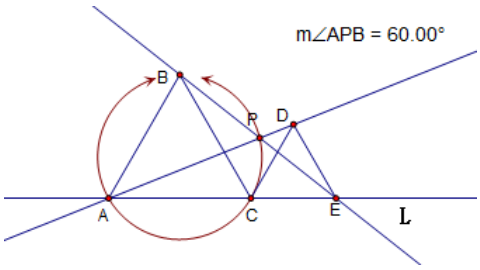
(1)A,B,C,D 四點共圓 ⇔ 對角互補……(1)

(2)A,B,C,D 四點共圓 ⇔ $\angle ABD = \angle ACD$ …(2)



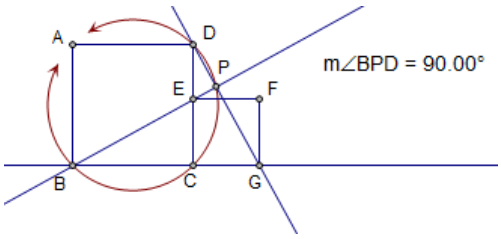
四邊形對角互補是它有外接圓的充要條件,這是國中的基本定理,在這裡引入窮舉法來證明是一件很美妙的事,可惜被基測的考法拋棄了。另一個四點共圓的條件(2)比較沒被注意,可以當作一個習作。

§2-1 由正三角形中的不變量引出軌跡



Δ ABC,Δ CDE 都是正三角形,直線 $\overleftrightarrow{AD},\overleftrightarrow{BE}$ 交於 P 點,則 $\Delta ACD \cong \Delta BCE$,可以得到 $\angle APB = 60^0$ 是一個不變量,讓 E 點在直線 $\overleftrightarrow{AC}$ 上動,因為 $\angle APB = \angle ACB$,由(2)得知 P 點的軌跡為一圓。

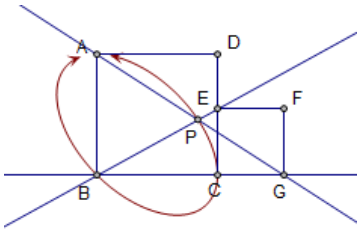
§2-2 由正方形中的不變量引出軌跡



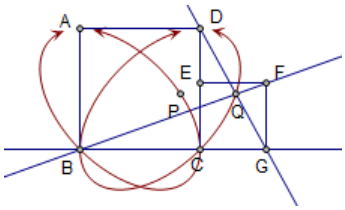
相同的狀況,若 ABCD,CEFG 都是正方形,直線 $\overleftrightarrow{BE},\overleftrightarrow{DG}$ 交於 P,則 $\Delta GCD \cong \Delta ECB$,可以得到 $\angle DPE = 90^0$ 是一個不變量,讓 G 點在直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 上動,因為 $\angle BCD = \angle BPD$ =90^0,由(2)知道 P 點的軌跡為一圓。

§3-1 變量中引出的軌跡

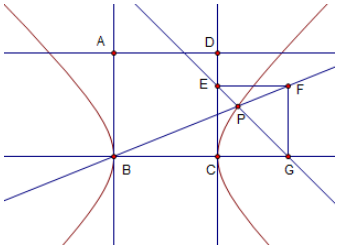
接下來,我取 P 點為 $\overleftrightarrow{AG},\overleftrightarrow{BE}$ 的交點,G 點在直線 $\overline{BC}$ 上動,則 P 點的軌跡如下圖(1), $\angle APB$ 在變動,而 P 點的軌跡看起來像一個橢圓,問題是:它是一個橢圓嗎?



圖(1)



圖(2)



圖(3)

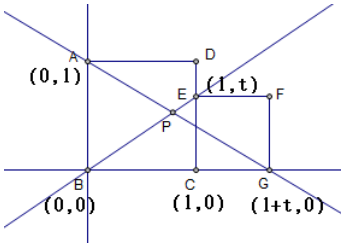
§3-2 對稱性

我取 Q 點為 $\overleftrightarrow{DG},\overleftrightarrow{BF}$ 的交點, G 點在直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 上動,則 Q 點的軌跡如圖(2),看起來動點 Q 的軌跡與動點 P 的軌跡對稱於線段 $\overline{BC}$ 的中垂線。合理的想法是它們一定與某種對稱性有關。

§3-3 改變選取的變量

取 P 為直線 $\overleftrightarrow{BF},\overleftrightarrow{GE}$ 的交點, G 點在直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 上動,則 P 點的軌跡如圖(3),是一雙曲線嗎?

§3-4 驗證一下



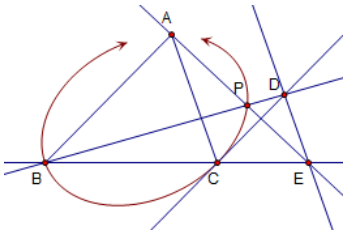
建立一座標系,使得 B(0,0),A(0,1),C(1,0),E(1,t),G(1+t,0),則

$\overleftrightarrow{BE}$:y=tx; $\overline{AG}$:-x=(1+t)(y-1)

消去 t,得 $x^2+xy+y^2-x-y=0$

$\delta=1^2-4=-3<0$,是橢圓類,因為圖形沒有退化,因此肯定圖(1)中的圖形就是橢圓。同理可以確定圖(3)是一雙曲線。

§4-1 把兩正三角形改成兩相似三角形看看

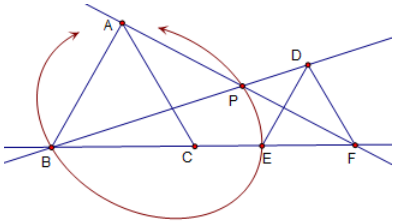


作任意三角形 ABC,過 C 作直線 L // $\overleftrightarrow{AB}$,在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上取一動點 E,過 E 作一直線 // $\overleftrightarrow{AC}$,交直線 L 於 D,則 $\Delta DCE \sim \Delta ABC$,連接 $\overleftrightarrow{BD},\overleftrightarrow{AE}$,設兩線交於 P 點,讓 E 點在直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 上動,則 P 點的軌跡看起來似乎是一個橢圓。

§4-2 合情的猜測

合理的猜測是§4-1 的圖是§2-1 的圓的線性變換。

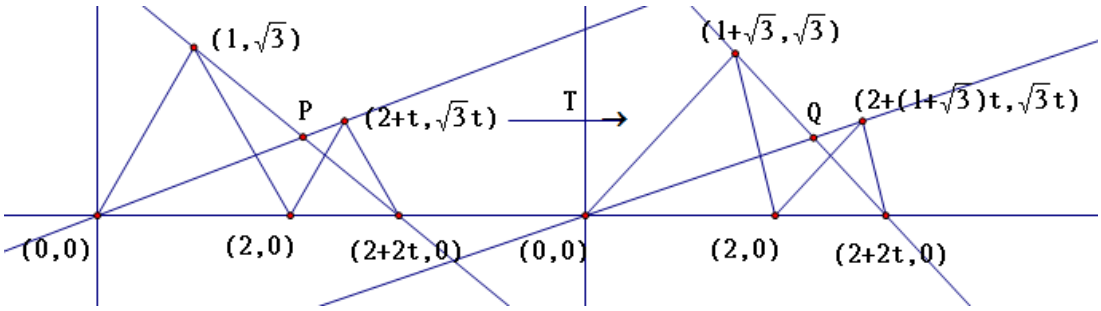
§4-3 讓兩正三角形離開看看



在直線 L 上作兩正三角形 ABC,DEF 如右圖,連接 $\overleftrightarrow{BD},\overleftrightarrow{AF}$,假設兩線交於 P 點,讓 F 在 L 上動,則 P 點的軌跡看起來似乎是一個橢圓。

§4-4 驗證你的猜測

作線性變換 令 $T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$,則 $T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,$T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$



$$\begin{cases}\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sqrt{3}t}{2+t}\\[2ex] \dfrac{y-\sqrt{3}}{x-1}=\dfrac{-\sqrt{3}}{1+2t}\end{cases}$$ 消去參數 t,得 P 點的軌跡方程式: $x^2+y^2-2x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}y=0$ .....(1)

$$\begin{cases}\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sqrt{3}t}{2+(1+\sqrt{3})t}\\[2ex] \dfrac{y-\sqrt{3}}{x-(1+\sqrt{3})}=\dfrac{-\sqrt{3}}{(1-\sqrt{3})+2t}\end{cases}$$

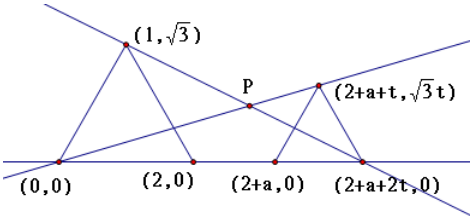
消去參數 t 得 Q 點的軌跡方程式; $x^2-2xy+2y^2-2x+(2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3})y=0$ .....(2)

這個結果與直接用矩陣變換一樣,是意料中的事。

亦即 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+y\\y\end{bmatrix}$,令 $X=x+y,Y=y$,則 $x=X-Y,y=Y$ 代入(1)中,化簡得(2)

因此,我們可以確定§4-1 的圖形是一個橢圓。

回到§4-3

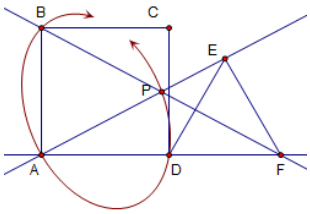


P 是 $\begin{cases} \dfrac{y}{x}=\dfrac{\sqrt{3}t}{2+a+t} \\ \dfrac{y-\sqrt{3}}{x-1}=\dfrac{-\sqrt{3}}{1+a+2t} \end{cases}$ 的解

消去參數 t,得 $3x^2+\sqrt{3}axy+(3+a)y^2-(6+3a)x-(2\sqrt{3}+\sqrt{3}a)y=0$

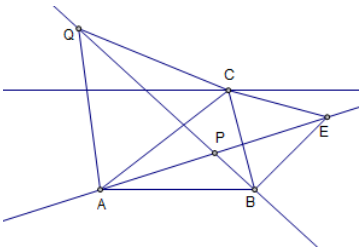
$\delta=(\sqrt{3}a)^2-12(3+a)$ =3a^2-12a-36=3(a-6)(a+2),所以§4-3 的圖形可以是橢圓,雙曲線或拋物線。(a=-2 時,圖形顯然是一直線。)

§5-1 把正方形與三角形擺在一起

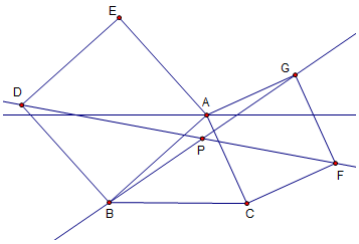


接著我作一個正方形 ABCD,一個正三角形 DEF,作直線 $\overleftrightarrow{AE},\overleftrightarrow{BF}$ 的交點 P,讓 F 在直線 $\overleftrightarrow{AD}$ 上動,則 P 點的軌跡看起來是一個橢圓,諸位看官何不驗證一下!

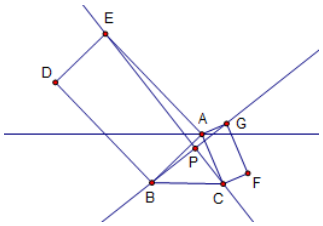
◇習作◇



1. 在 Δ ABC 的兩邊 $\overline{AC},\overline{BC}$ 往外各作一個正三角形 ACQ,BCE,假設直線 $\overleftrightarrow{AE},\overleftrightarrow{BQ}$ 交於 P 點,讓 C 點在某一直線上動,則 P 點的軌跡為何?

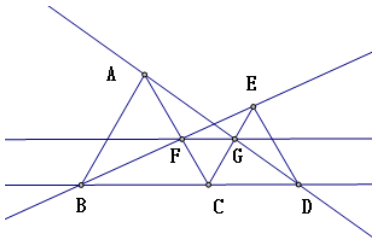


2. 在 Δ ABC 的兩邊 $\overline{AC},\overline{AB}$ 往外各作一個正方形 ACFG,ABDE 假設直線 $\overleftrightarrow{BG},\overleftrightarrow{DF}$ 交於 P,讓 A 點在某一直線上動,則 P 點的軌跡為何?



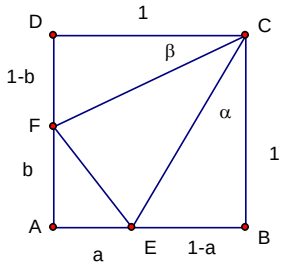
3. 在 Δ ABC 的兩邊 $\overline{AC},\overline{AB}$ 往外各作一個矩形 ACFG,ABDE 使得 $\overline{AG}:\overline{AC}=\overline{AB}:\overline{AE}=1:2$,直線 $\overleftrightarrow{BG},\overleftrightarrow{CE}$ 交於 P 點,讓 A 點在某一直線動,則 P 點的軌跡為何?

4. 楔子中,(如右圖) 試證
   (1) ΔCFG 為正三角形
   (2) $\overleftrightarrow{FG} // \overleftrightarrow{BD}$
   (3)假設 $\Delta ABC, \Delta CDE, \Delta CFG$ 的邊長分別為 a,b,c
   試證 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$

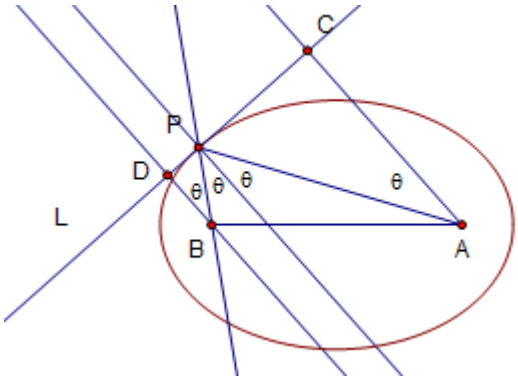


5. Γ : $x^2=4cy$, $c>0$; 自 x 軸上方遠處沿直線 $x=a$ ($a \neq 0$) 射出一雷射光,經過拋物 Γ 的兩次反射後,光束沿著直線 $x=b$ 射出。證明:不論 a 值為何,a 與 b 的乘積為定值 (2005 北區 新竹)

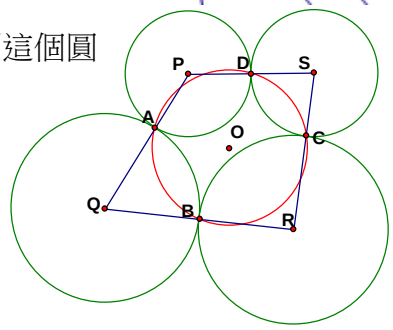
6. 正方形 ABCD 的邊長=1,在 $\overline{AB}, \overline{AD}$ 上各取一點 E,F,使得 ΔAEF 的周長=2,求 $\angle ECF =$ (2004 北區 花蓮)



7. A、B 是橢圓的焦點，P 是橢圓上任一點，設 $\overline{PA}+\overline{PB}=2a$。L 是過 P 的切線。過 A、B 做 L 的垂線，垂足為 C、D，則 $\overline{AC}\times\overline{BD}$ 是一常數。

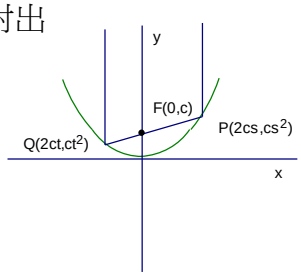


8. 半徑 4、6、6、4 兩兩外切的圓,則切點 A、B、C、D 共圓，換句話說，讓此四邊形 PQRS 變動,則這個圓是一個不變量。(數亦優第 17 期)



習作解答

5. 證明 直線 $x=a$ 上的光線碰到 Γ 上的點 $P(2cs, cs^2)$ (即 $a=2cs$),反射通過焦點 $F(0,c)$ 後碰到 Γ 上的點 $Q(2ct, ct^2)$,再由 $x=b$ 射出 (即 $b=2ct$)



因為 P,F,Q 共線,所以 $\frac{ct^2-cs^2}{2ct-2cs}=\frac{ct^2-c}{2ct-0}$

$\frac{t+s}{2}=\frac{t^2-1}{2t}$, $st=-1$, 所以 $a\times b=(2cs)\times(2ct)=-4c^2$

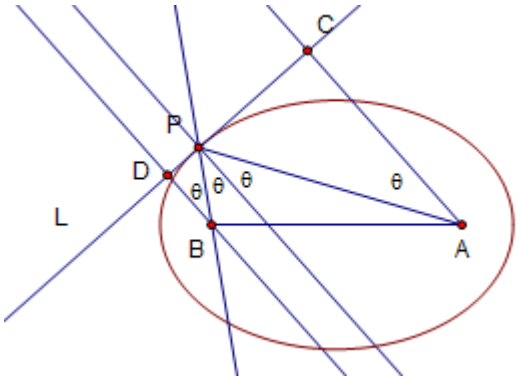
6. $a+b+\sqrt{a^2+b^2}=2$，$\sqrt{a^2+b^2}=2-a-b$，平方化簡，得 ab-2a-2b+2=0

$\tan\alpha=1-a$，$\tan\beta=1-b$，則 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{(1-a)+(1-b)}{1-(1-a)(1-b)}=\ldots=1$

所以 $\alpha+\beta=45^0$，即 $\angle ECF=45^0$

7. A、B 是橢圓的焦點，P 是橢圓上任一點，則 $\overline{PA}+\overline{PB}=2a$。

L 是過 P 的切線。過 A、B 做 L 的垂線，垂足為 C、D，則 $\overline{AC}\times\overline{BD}$ 是一常數。



證明

過 P 作法線，則 $\angle PAC=\angle PBD=\theta$，

$\angle APB=2\theta$

假設 $\overline{PA}=x,\overline{PB}=y$，則 x+y=2a

$$\cos 2\theta=\frac{x^2+y^2-(2c)^2}{2xy}=2\cos^2\theta-1$$

$$2\cos^2\theta=\cos 2\theta+1=\frac{x^2+y^2-4c^2+2xy}{2xy}=\frac{(x+y)^2-4c^2}{2xy}$$

則 $\overline{AC}\times\overline{BD}=x\cos\theta\times y\cos\theta=xy\times\dfrac{4a^2-4c^2}{4xy}$ =a^2-c^2=橢圓半短軸長的平方，是一常數。

同理，雙曲線中，假設

$\overline{PA}=x,\overline{PB}=y$

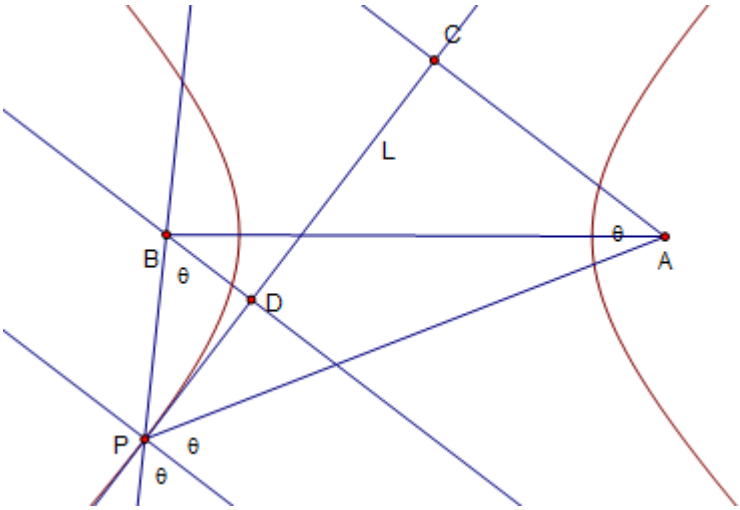
則 $|x-y|=2a$

L 是過 P 點的切線，則

$$\cos(180^0-2\theta)=\frac{x^2+y^2-(2c)^2}{2xy}$$

$\overline{AC}\times\overline{BD}=x\cos\theta\times y\cos\theta$

=…=c^2-a^2=b^2(半共軛軸長平方)



§ 後記

前年，我到台中東山高中兼課,校長對我非常禮遇。因此，我想帶學生作科展，這篇文章(由不變量引出動點軌跡)是當時孕育出來的東西，希望學生能由此出發，發展出一個主題。

§ 參考資料

1. 全任重教授 http://poncelet.math.nthu.edu.tw/disk3/moe-proj/index1.html
2. 陳創義教授 http://math.ntnu.edu.tw/~cyc/
3. 成功高中官老師 http://140.111.115.8/longlife/