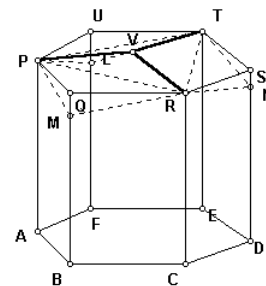


蜂巢的一個蜂室就像這個樣子,外形是正六稜柱 (regular hexagonal prism) 正六邊形 PQRSTU 是蜂室的正面, "屋頂" 是三個全等的菱形 (用蠟封住), 並與稜柱成等角。



右圖中, ABCDEF-PQRSTU 是正六角柱, 假設底面正六邊形 PQRSTU 的邊長=1 今截取 MQ=NS=UL=x, 並往上翻到 V, 使得 PMRV, RNTV, PLTV 是菱形。(則底面變成三個全等的菱形) ABCDEF-PRT-V 的體積與原來的六角柱不變, 欲使 ABCDEF-PRT-V 的表面積有最小值, x=?

假設邊長 PQ=1, QM=x 則 $\overline{PM} = \sqrt{1+x^2}$, ΔPMV 的高 = $\frac{1}{2} \overline{PR} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{MV} = 2\sqrt{(1+x^2) - \frac{3}{4}} = \sqrt{4x^2}$, $\Delta PMC = \frac{1}{2} \sqrt{1+4x^2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, 以一個柱面 PABQ 而言, 減少表面積 ΔPMQ , 增加了表面積 ΔPMV , 所以增加了表面積

$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{1+4x^2} - \frac{1}{2}x$, 則 x=? 時 f(x) 有最小值呢?

高三的同學可用微積分簡單處理, 高二的同學看後記(5), 至於其他方法請看參考書目(1)

$$\text{解得 } x = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \text{ 假設 } \angle MPV = \theta, \text{ 則由餘弦定理知 } \cos \theta = \frac{\frac{9}{8} + \frac{9}{8} - \frac{3}{2}}{2\sqrt{\frac{9}{8}} \times \sqrt{\frac{9}{8}}} = \frac{1}{3}$$

查表, $\theta = 70^\circ 32'$ 所以 $\angle MPV = 109^\circ 28'$

後記:

1. 希臘時代的 Pappus 就提出等周長問題(isoperimetric problem): 在平面上, 等周長的區域, 以圓形面積最大。

他認為, 蜜蜂把牠們的蜂巢作成正六邊形, 顯示了某種程度的數學知能 (mathematical understanding)。

法國物理學家 Monsieur de Reaumur 認為, 蜂巢的形狀是為了使材料最節省 (容積固定, 表面積最小)。因此向巴黎科學院院士 Koenig 請教。得到肯定的答案。材料最節省時, 蜂室底部三個菱形, 確實 $\angle MPV = 109^\circ 28'$ 與自然界實際的蜂巢相符。也就是說, 蜜蜂確實以最省材料的方式建造牠們的蜂巢。

<https://www.youtube.com/watch?v=QEzlsjAqADA&list=PLJicmE8fK0EiEzttYMD1zYkT-SmNf323z&index=52>

2. 甲烷 CH_4 的結構 HCH 的夾角也是 $109^\circ 28'$, 不是巧合吧!
3. 據說一些礦石也有類似的結構, 沒有研究耶.

4. 求 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{1+4x^2} - \frac{1}{2}x$ 的最小值

$$\text{令 } x = \frac{\tan \theta}{2}, \text{ 則 } f(x) = f(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{4} \sec \theta - \frac{1}{4} \tan \theta$$

$$\text{設 } \frac{\sqrt{3} - \sin \theta}{\cos \theta} = k \text{ 則 } \sqrt{3} = |k \cos \theta + \sin \theta| \leq \sqrt{k^2 + 1}, \text{ 所以 } k^2 \geq 2$$

因為 $k > 0$, 所以 k 的最小值為 $\sqrt{2}$

$$\text{此時 } \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, x = \frac{\tan \theta}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

參考資料

1. 華羅庚科普著作選集 p.160
2. 100 Great Problems of Elementary Mathematics p.366 第 93 題
3. 數學歷史典故 梁宗巨 p.425
4. 數學發現的趣談 蔡聰明
5. [蜂房結構\(Honeycomb Conjecture\)](#)最近由 [Thomas Hales](#) 解決了