§楔子

1999 年，台大數學系推甄考了 10 題，其中一題是這樣的:

(1)證明對所有的大於 1 的正整數 n,$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$都不是整數。

(2)如果分母不是連續整數,試舉一反例。

剛好那時候有一位學生小張準備推甄台大，於是我每星期有一天跟他討論數學，幫他張羅一些題目做練習。我是在網路上找到以上這個題目的。

這一年是國中辦推甄高中的第二年，我女兒推甄上了文華高中，小張順利上了台大，算是雙喜臨門。

§無窮調和級數

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$是一個無窮調和級數，第一個證明此無窮調和級數發散的人是尼克爾．奧里斯姆(Nicole Oresm 1323~1382)，中世紀的哲學家。

尼克爾．奧里斯姆 1360 年給出來的的證法是這樣子的：

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{16}>8\times\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$

…

$$\frac{1}{2^{n-1}+1}+...+\frac{1}{2^n}>2^{n-1}\times\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}>(n-1)\times\frac{1}{2}$$

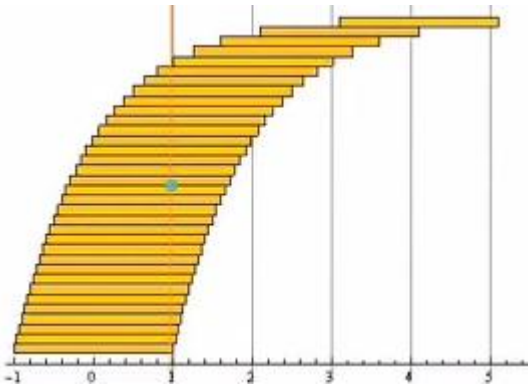
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^n}>1+n\times\frac{1}{2}$,所以$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$發散。

我高中時就是這樣證明的。

18 世紀的數學主流是微積分與無窮級數，奧里斯姆在 14 世紀就可以證出這個級數的發散性，令人佩服。

「天才之旅」一書中有好幾種無窮調和級數發散的證明，分別由蒙哥利(Pietro Mengoli 1625~1686)、柏努利兄弟 John Bernoulli(1667~1748)、Jacob Bernoulli(1655~1705)證明。

§ 多米諾骨牌堆疊(Overhanging dominoes)是夏普(T.R.Sharp)1954 年玩出來的遊戲。



有 n 張牌和一個桌子，將這 n 張牌沿桌子邊緣一張張疊起來。

疊的方式是:在符合重力的條件下，儘可能突出桌緣，牌的邊緣和桌子邊緣平行，我們最多能突出多少？

物理學家常用「思想實驗」來解釋現象。我們也來仿效一下。

所謂「符合重力的條件」是甚麼意思？

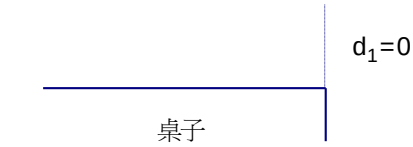
假設 n 個物體的重量分別是 w_1、w_2、…w_n，位置為 p_1、p_2、…p_n。則它們合在一起的的重心位置為 $p_{n+1}=\dfrac{w_1p_1+w_2p_2+...+w_np_n}{w_1+w_2+...+w_n}$ ；假設每張紙牌的重量皆為 w，則 $p_{n+1}=\dfrac{p_1+p_2+...+p_n}{n}$ 。

當只有一張紙牌時，如果紙牌的重心剛好在桌子邊緣上，我們就得到最大的突出。假設紙牌長 2 單位，則突出量為 1 單位。(下頁圖 2)

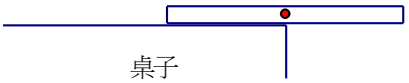
當有兩張牌時，如果上面紙牌的重心恰好落在第二張紙牌的邊緣，而這兩張紙牌合起來的重心落在桌緣時，$d_3=\dfrac{1+2}{2}=1+\dfrac{1}{2}$，我們得到最大的突出$1+\dfrac{1}{2}$單位。(下頁圖 3)

我們將牌一張張疊起來，使得上面 k 張牌的重心恰落在桌面的邊緣。

假設 d_k=第 k 張紙牌的最大突出量。(沒有紙牌的特殊情況假設為 $d_1=0$，有 k 張紙牌時桌子視為第 k+1 張紙牌。)



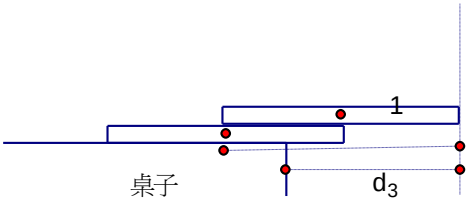
(1)沒有紙牌時，$d_1=0$



(2)1 張紙牌時，$d_2=1$

(3)2 張紙牌時，

$$d_3=\frac{(1+d_1)+(1+d_2)}{2}=\frac{1+(1+1)}{2}=1+\frac{1}{2}$$

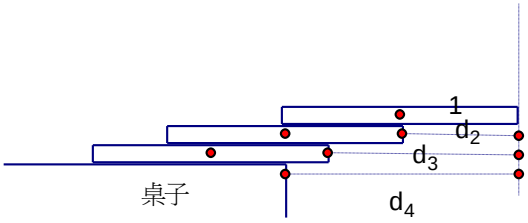


(桌子當作是第 3 張紙牌，所以 d_3 也就是兩張紙牌的最大突出量。)

(4)3 張紙牌時，

$$d_4=\frac{(1+d_1)+(1+d_2)+(1+d_3)}{1+1+1}$$

$$=\frac{3+d_1+d_2+d_3}{3}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$



一般而言 $kd_{k+1}=k+d_1+d_2+...+d_k$ 對 $k\geq 1$….(1)

$(k-1)d_k=(k-1)+d_1+d_2+...+d_{k-1}$…(2) 對 $k\geq 2$….(2)

兩式相減，得 $kd_{k+1}-(k-1)d_k=1+d_k$

即 $d_{k+1}=d_k+\frac{1}{k}$ 對 $k\geq 2$；但是此式對 k=1 也成立。

所以對 $k\geq 1$，$d_{k+1}=d_k+\frac{1}{k}$ 。

紙牌的突出量即 d_{k+1}，容易算出 $d_{k+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}=H_k$

總之，第二張牌比第三張牌突出 $\frac{1}{2}$ 個單位長。

第三張牌比第四張牌突出 $\frac{1}{3}$ 個單位長。

因此 n 張牌的最大突出量=$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ 單位，用 H_n 表示。

例如，四張牌的突出量=$H_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=2\frac{1}{12}$單位，超過一張牌的長度一點點。

52 張牌的突出量為 H_{52}，大約 2.27 張牌的長度。

因此，理論上只要有足夠多的骨牌，最頂層骨牌離最底層的距離就可以無窮遠。$H_{52}\fallingdotseq 2.27$ 告訴我們，實際上的堆牌是一件蠻困難的事。

§ 後記

國中用推甄的方式上高中是一個很棒方法，至少我女兒就這樣上了文華高中。可惜只辦了兩年。這兩年台中全國補習班真是生意鼎盛。

馬上 12 年國教要上路了，各校要辦特色招生，我預料這也將是補習班大展身手的時候，從我念小學到現在，所謂「減輕負擔、快樂學習」從來都只是天邊的彩虹。(明年有許多縣市已宣布不續辦特招。)

§ 習作

1. 證明對所有大於 1 的正整數 n，H_n 都不是整數。
2. 所有的無窮調和級數都發散，這是常識。試證$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$發散。
3. 試證「若 a>1 則$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}>\frac{3}{a}$」。並由此證明無窮調和級數的發散性。(這是 1647 年蒙哥利(Pietro Mengoli)發現的，Journey through Genius p.205。)

§ 參考資料

1. 多米諾骨牌堆疊(Overhanging dominoes) http://v.163.com/movie/2006/8/F/4/M6GLI5A07_M6GLMCDF4.html
2. http://www.dcs.warwick.ac.uk/~msp/papers/maximum_overhang.pdf
3. 天才之旅(Journey through Genius by William Dunham)p.227~236
4. 1665 年，牛頓推導出第一個冪級數$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$

   尤拉在 1734 年，利用牛頓的結果得到$\gamma=\lim_{n\to\infty}(H_n-\ln(n))=0.57721566\ldots$ γ稱為尤拉常數。
5. http://mathworld.wolfram.com/Euler-MascheroniConstant.html 尤拉常數
6. 具體數學(格致圖書公司陳衍文翻譯) p.295

只要有足夠多的骨牌，最頂層骨牌離最底層的距離就可以無窮遠。
http://www.slideshare.net/lufeche/concrete-mathematics-graham-knuth-patashnik

7. 2014 年數學覺知月主題之一:Over-thinking the Overhang
8. 數學傳播季刊第 34 卷第 2 期；第 35 卷第 2 期