§ 楔子

101 年文華高中教師甄試考了這樣一道題目：

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整係數多項式，若 a_n、$f(1)$、$f(0)$ 均為奇數，試證 $f(x)=0$ 沒有有理根。

§ 牛頓定理 (整係數多項方程式的有理根判別定理)：

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整係數多項式，且 $(a_n，a_{n-1}，\cdots，a_1，a_0)=1$

若 f(x) 有一次因式 px-q，其中 p、q 是互質的整數。則 (1) $p|a_n, q|a_0$ (2)

$p-q|f(1)$ 且 $p+q|f(-1)$ 。

§ 可以這樣證明嗎？

關於因數、倍數的初等數論在 99 課程綱要被排除了，因此牛頓定理的證明就失卻了根據。

最近看到有某位老師是這樣證明的：

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=(px-q)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0)$，其中 b_0、b_1、$\cdots$,b_{n-1} 是整數。比較兩邊係數則 $a_n=pb_{n-1}$，$a_0=-qb_0$，所以 $p|a_n, q|a_0$

我們只能知道 $b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-1}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0$ 是有理係數多項式，何以知道 $b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-1}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0$ 是整係數多項式?

因此，這樣的證明是有瑕疵的。

§ 高斯引理

若 $f(x)= a_nx_n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ 是整係數多項式，$(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n)=1$，稱 f(x) 是樸素 (primitive) 多項式，則高斯引理說：

若樸素多項式 f(x) 可以分解成兩個有理係數多項式，則 f(x) 可以分解成兩個整係數多項式。

換句話說，$b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-1}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0$ 是整係數多項式是必須用高斯引理證明的。

§ 正確的證明如下：

f(x) 有因式 px-q，則 $f(\frac{q}{p})=0$

$a_n(\frac{q}{p})^n+a_{n-1}(\frac{q}{p})^{n-1}+\ldots+a_1(\frac{q}{p})+a_0=0$，兩邊同乘以 p^n

$$a_n\times q^n+a_{n-1}\times pq^{n-1}+a_{n-2}\times p^2q^{n-2}+\ldots+a_1p^{n-1}q=0$$

$a_nq^n=-p(a_{n-1}\times q^{n-1}+a_{n-2}\times pq^{n-2}+\ldots+a_1p^{n-2}q)$

所以 $p|a_n q^n$，因為 (p,q)=1，所以 $(p,q^n)=1$，所以 $p|a_n$

同理可證 $q|a_0$

§ 回到文華高中教師甄試題：

$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整係數多項式，若 a_n、f(1)、f(0)均為奇數，試證 f(x)=0 沒有有理根。

若 f(x)=0 有一個有理根 $\frac{q}{p}$，則 $f(x)=(px-q)(b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0)$，由高斯引理，$b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 是整係數多項式。

因為 a_n、a_0 都是奇數，$p|a_n, q|a_0$，所以 p、q 都是奇數，因此 p-q 為偶數，則 $f(1)=(p-q)(b_{n-1}+\cdots+b_1+b_0)$ 為偶數，矛盾。所以 f(x)=0 沒有有理根，得證。

可見證明這個命題也要用到高斯引理。

§ 參考資料

1. 高中數學網「Math.Pro 數學補給站」
   http://math.pro/db/thread-1333-1-1.html
2. 高斯引理的證明請看
   Topics in Algebra by i.n.herstein second edition p.160
3. 高中數學電子報第 67 期 張海潮教授。
4. 許志農 算術講義
   http://math.ntnu.edu.tw/~maco/macobook/arith/arith33.pdf