

已知 $a_1, a_n = \frac{aa_{n-1}+b}{ca_{n-1}+d}$, 求 $a_n =$

let $a_n = \frac{p_n}{q_n}$, then $\frac{p_n}{q_n} = \frac{ap_{n-1}+bq_{n-1}}{cp_{n-1}+dq_{n-1}}$

有一個 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 使得 $A \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$

在求 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = x$ 的不動點時, 我們注意到若 $a_n = \frac{p_n}{q_n} \rightarrow u$, 則 $\frac{\lambda p_n}{\lambda q_n} \rightarrow u$

所以在求 $f(x)$ 的動點的過程中

$\frac{p_n}{q_n} = \frac{\lambda p_n}{\lambda q_n} = \frac{ap_n + bq_n}{cp_n + dq_n}$, 即 $Au = \lambda u$, 就是日新兄所說 $[u] = [\lambda u] \leftrightarrow \frac{p_n}{q_n}$

$A[u] = [\lambda u]$

因此 $f(x)$ 的不動點就是 A 的不動點

所謂商空間或許就是在這種情況下引入的