數列$< a_n >$的遞迴公式為$a_n = f(a_{n-1})$，把a_n, a_{n-1}換成 x，x=f(x)的實數解稱為不動點

一．$a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + 3$，求$a_n =$ $a_n = 2^{n+1} - 3$

二．$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0, ad - bc \neq 0$

且 f(x)只有兩相同的不動點 x_0，且$a_1 \neq f(a_1)$ 則$\dfrac{1}{a_n - x_0} = \dfrac{1}{a_{n-1} - x_0} + k, k = \dfrac{2c}{a+d}$

例 $a_1 = 0, a_n = \dfrac{1 + a_{n-1}}{3 - a_{n-1}}$，求$a_n =$

不動點是 x=1，

$$a_n - 1 = \frac{1 + a_{n-1}}{3 - a_{n-1}} - 1 = \frac{-2 + 2a_{n-1}}{3 - a_{n-1}}$$

$$\frac{1}{a_n - 1} = \frac{1}{a_{n-1} - 1} - \frac{1}{2}$$

解出$a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$

三．$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0, ad - bc \neq 0$

且 f(x)只有兩不同的不動點x_1, x_2，且$a_1 \neq f(a_1)$，則

$$\frac{a_n - x_1}{a_n - x_2} = k\left(\frac{a_{n-1} - x_1}{a_{n-1} - x_2}\right), k = \frac{a - cx_1}{a - cx_2}$$

例 $a_1 = 1, a_n = \dfrac{-6 + a_{n-1}}{2 - a_{n-1}}$，求 a_n=

不動點是-2，3

$$\frac{a_n + 2}{a_n - 3} = -\frac{1}{4}\left(\frac{a_{n-1} + 2}{a_{n-1} - 3}\right)$$

解出$a_n = \dfrac{-4 + 9(-\frac{1}{4})^{n-1}}{2 + 3(-\frac{1}{4})^{n-1}}$

習作

以下求$a_n =$

1． $a_1 = 2, a_n = 2 - \dfrac{1}{a_{n-1}}$

2． $a_1 = 3, a_n = \dfrac{2}{2 - a_{n-1}}$

$a_1=1, a_n=\dfrac{2a_{n-1}+6}{a_{n-1}+1}$，求 $a_n=$

1. 求出不動點 $x_1=3, x_2=-2$

2. 令 $a_n=\dfrac{p_n}{q_n}$，則 $\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{2p_{n-1}+6q_{n-1}}{p_{n-1}+q_{n-1}}$，取 $p_n=2p_{n-1}+6q_{n-1}, q_n=p_{n-1}+q_{n-1}$

則 $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}$

算出 A 的 eigen value 與 eigen vector

$u=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_1=4, v=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_2=-1$，$B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B^{-1}AB=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$a_1=\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \leftrightarrow u_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，$a_2 \leftrightarrow u_2=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} 4^{n-1} & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} \end{pmatrix}B^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3\times 4^{n-1}+2\times(-1)^{n-1} & 6\times 4^{n-1}-6\times(-1)^{n-1} \\ 4^{n-1}-(-1)^{n-1} & 2\times 4^{n-1}+3\times(-1)^{n-1} \end{pmatrix}$$

得 $a_n=\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{9\times 4^{n-1}-4\times(-1)^{n-1}}{3\times 4^{n-1}+2\times(-1)^{n-1}}$

結論是

$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$Au=\lambda_1 u, Av=\lambda_2 v$

eigen value $\lambda_1=4 \leftrightarrow u=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow x_1=3$

$\lambda_2=-1 \leftrightarrow v=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow x_2=-2$

是 eigen vector 與 fixed point 對應

若 eigen vector 為 $u=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$，則 fixed point 為 $x_1=\dfrac{a}{b}, x_2=\dfrac{c}{d}$

u,v 方向的斜率