關於分式型遞迴數列的不動點算法

§1 前言

有一個相當不錯的網站「Math Pro」(參考資料 1)，是一群熱情的年輕人建立的，主要是針對要考高中數學教師甄試而設立。

我偶而有些問題，甚至於是國中的，發佈在網站上，都很快有高手幫忙解答。

我在龍騰數亦優雜誌第 26 期有一篇文章「遞迴數列」，其中提到「分式型遞迴數列的不動點解法」，就是在這個網站上看到的。

§2 所謂不動點

布勞爾(L.E.J.Brouwer 1881~1966)是直覺論邏輯的鼻祖，1910 年 他發現不動點定理。或許是他在早上喝咖啡的時候發現的吧！他也是提倡建構主義的人。江澤涵先生(1902~1994)也是這方面的專家。

不動點算法可以建構性地把多項式方程式的根找出來(參考資料(4)。

不管是哲學層面或是實際計算的層面不動點理論都很令我傾心。

§3 所謂不動點解法

請上網看參考資料(3)

數列$\langle a_n \rangle$的遞迴公式為$a_n = f(a_{n-1})$，把a_n, a_{n-1}換成 x，x=f(x)的實數解稱為不動點。

例 $a_1 = 1, a_n = \dfrac{2a_{n-1}+6}{a_{n-1}+1}$，求$a_n =$

1．考慮$f(x) = \dfrac{2x+6}{x+1} = x$，求出不動點$x_1 = 3, x_2 = -2$

(姑且稱 $x^2-x-6=0$ 為「不動點方程式」。)

$$\frac{a_n-3}{a_n+2} = \frac{\dfrac{2a_{n-1}+6}{a_{n-1}+1}-3}{\dfrac{2a_{n-1}+6}{a_{n-1}+1}+2} = (-\frac{1}{4})(\frac{a_{n-1}-3}{a_{n-1}+2})$$ ，$<\dfrac{a_n-3}{a_n+2}>$是等比數列，所以

$$\frac{a_n-3}{a_n+2} = (-\frac{2}{3})(-\frac{1}{4})^{n-1}$$ ，可以解出$a_n = \dfrac{9\times 4^{n-1} - 4\times(-1)^{n-1}}{3\times 4^{n-1} + 2\times(-1)^{n-1}}$

2．令$a_n = \dfrac{p_n}{q_n}$，則$\dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{2p_{n-1}+6q_{n-1}}{p_{n-1}+q_{n-1}}$，取$p_n = 2p_{n-1}+6q_{n-1}, q_n = p_{n-1}+q_{n-1}$

則$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}$

算出 A 的固有值與固有向量，$Au = \lambda u$

$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = 4, v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = -1$，$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$B^{-1}AB=\begin{pmatrix}4&0\\0&-1\end{pmatrix},\ a_1=\begin{pmatrix}p_1\\q_1\end{pmatrix}\leftrightarrow u_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ a_2\leftrightarrow u_2=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix}p_1\\q_1\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}4^{n-1}&0\\0&(-1)^{n-1}\end{pmatrix}B^{-1}\begin{pmatrix}p_1\\q_1\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3\times4^{n-1}+2\times(-1)^{n-1}&6\times4^{n-1}-6\times(-1)^{n-1}\\4^{n-1}-(-1)^{n-1}&2\times4^{n-1}+3\times(-1)^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\q_1\end{pmatrix}$$

其中取 $\begin{pmatrix}p_1\\q_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

得 $a_n=\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{9\times4^{n-1}-4\times(-1)^{n-1}}{3\times4^{n-1}+2\times(-1)^{n-1}}$

這裡 A 有一個特徵方程式 $\begin{vmatrix}2-x&6\\1&1-x\end{vmatrix}=0$

我一直在思考「不動點方程式」與特徵方程式有甚麼關係。

「不動點方程式」的根(所謂不動點)與 A 的固有值到底有甚麼關係，或者說解法(1)與不動點有什麼關係。

在參考資料(2)(3)中並沒有提供這樣的資訊。

龍騰數亦優雜誌第 26 期是 2015 年 3 月發行，換句話說，我的大惑不解擺了 5 年。

§4 因緣俱足之日

今年 4 月初，因為某種因緣，我在網路上遇到學弟黃振芳先生，進而認識鄭日新先生，又連絡上同學李志豪先生。

振芳兄因為看到我在 CASE(台大科學教育發展中心)寫的「我的數學夢」，因此鼓勵我再重拾微分幾何之夢。

微分幾何裡面，線性代數是一個重要工具。

黃武雄老師在「微分幾何講稿」或從前的「高中實驗本數學」都一再強調，固有值理論也是重中之重。

因此，我把多年的困惑向這些新認識的朋友提出。也得到熱情回應。

日新兄提到在商空間中，$[u]=[\lambda u]$，所以對 A 合乎不動點的要求，即

$A[u]=[\lambda u]=[u]$

坦白說，不是真懂。

於是我把整個過程重算了一遍。

結論是：

$A=\begin{pmatrix}2&6\\1&1\end{pmatrix}$, $Au=\lambda_1 u, Av=\lambda_2 v$

固有值 $\lambda_1=4\leftrightarrow u=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\leftrightarrow x_1=3$

$$\lambda_2=-1\leftrightarrow v=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\leftrightarrow x_2=-2$$

我一直想 A 的固有值與「不動方程式」中的不動點對應(因為都是實數)。
其實一直搞錯方向。
是固有向量與「不動方程式」中的不動點對應。

已知 a_1 ，$a_n=\dfrac{aa_{n-1}+b}{ca_{n-1}+d}$，求 $a_n=$

令 $a_n=\dfrac{p_n}{q_n}$ ，則 $\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{ap_{n-1}+bq_{n-1}}{cp_{n-1}+dq_{n-1}}$

有一個 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，使得 $A\begin{pmatrix}p_{n-1}\\q_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}$

在求 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}=x$ 的不動點時，我們注意到若 $a_n=\dfrac{p_n}{q_n}\to u$，則 $\dfrac{\lambda p_n}{\lambda q_n}\to u$

所以在求 f(x)的動點的過程中

$\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{\lambda p_n}{\lambda q_n}=\dfrac{ap_n+bq_n}{cp_n+dq_n}$，即 $Au=\lambda u$，就是日新兄所說 $[u]=[\lambda u]\leftrightarrow\dfrac{p_n}{q_n}$

$A[u]=[\lambda u]=[u]$

因此 f(x)的不動點就是 A 在上述商空間的不動點。
所謂商空間(quotient space)應該就是在這種情況下引入的。

§5 後記

昨晚，重看「劍橋五重奏」。
杜文仁先生在導讀中提到「人透過集中的思維是可以進入超心層的，這從許多科學家 例如 Poincare 和藝術家 例如 Mozart 的自述中可以得到印證。」
早上，因為要寫這篇文章時，就上網瀏覽了一下數亦優的網站，發現第 33 期有一篇「H.Poincare 談數學創造」，Poincare 說潛意識下的工作在數學創造中佔有重要的地位。
這跟榮格(C.G.Jung)關於潛意識的理論不謀而合。
一個牽掛甚久的問題，大概在我的潛意識工作了很久。托日新兄的福，點了一個火種，終於通解。而且對商空間有更深入的認識，是附帶的收穫。
在平淡無奇的生活中，還有比這個更值得喜悅的嗎。

§6 參考資料

1. 「Math Pro 」https://math.pro/db/
   https://math.pro/db/thread-1668-1-1.html
2. 數學傳播季刊第 28 卷第 1 期 遞歸數列與不動點
3. 不點解法求數列通項的理論依據是甚麼
   https://kknews.cc/zh-tw/education/85xvo6e.html
4. 數學傳播季刊第 17 卷第 3 期 多項式方程求根的魔術植物栽培算法