§ 楔子

有一天,我與茶博士劉老師聊天。他說以前曾經考過品茶師,是這樣考的:每個人前面放 10 種不同的茶,各兩杯,分前後兩排,品嘗後,把相同的茶配成對,據說配成功 6 對就可成為品茶師。那麼,如果有一個人,他胡亂配對,則它配成功的杯數的數學期望值是多少?

我把問題丟到數學討論群好幾天,沒有下文,於是決心自己把它搞定。

(http://mathforum.org/kb/forum.jspa?forumID=13)

§01 預備定理

n 對茶,任意配對,全部都配錯的情形有幾種?

假設有 $A_1,a_1,A_2,a_2,\ldots,A_n,a_n$ 共 n 對茶

$S_i=\{A_i$ 與 a_i 配成功的配對情形$\}$

則全部都配錯的情形的個數根據排容原理

$$=\left|S_1'\cap S_2'\cap\ldots\cap S_n'\right|=\left|(S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_n)'\right|=n!-\left|S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_n\right|$$

$$=n!-\{\sum_i\left|S_i\right|-\sum_{i<j}\left|S_i\cap S_j\right|+\sum_{i<j<k}\left|S_i\cap S_j\cap S_k\right|-\ldots+(-1)^{n-1}\left|S_1\cap S_2\cap\ldots\cap S_n\right|$$

$$=n!-C_1^n(n-1)!+C_2^n(n-2)!-\ldots+(-1)^{n-1}=C_2^n(n-2)!-\ldots+(-1)^{n-1}$$

§02 合情猜測

假設 E(n)=n 對茶配對成功的數目的期望值。

(1)則 E(1)=1

(2)n=2 時,A,B 與 a,b 配對

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

$$E(2)=0\times\frac{1}{2}+1\times0+2\times\frac{1}{2}=1$$

(3)n=3 時,A,B,C 與 a,b,c 配對

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

$$E(3)=1\times\frac{3}{6}+3\times\frac{1}{6}=1$$

(4)n=4 時,A,B,C,D 與 a,b,c,d 配對

$$p_0=\frac{1}{4!}\times\{4!-C_1^4\times3!+C_2^4\times2!-C_3^4\times1!+1\}=\frac{9}{24}$$

$$p_1=\frac{1}{4!}\times C_1^4\times\{3!-C_1^3\times2!+C_2^3\times1!-1\}=\frac{8}{24}$$

$$p_2=\frac{1}{4!}\times C_2^4\times\{2!-C_1^2\times1!+1\}=\frac{6}{24}$$

$p_3=0$

$p_4=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$

x_1	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{9}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{6}{24}$	0	$\frac{1}{24}$

,$E(4)=\frac{8+12+4}{24}=1$

所以合情的猜測是 E(n)=1

§03 更多證據,加強信心。

n=5 時

$p_0=\frac{1}{5!}\{C_2^5\times 3!-C_3^5\times 2!+C_4^5\times 1!-1\}=\frac{44}{120}$

$p_1=\frac{1}{5!}\times C_1^5\times\{C_2^4\times 2!-C_3^4\times 1!+1\}=\frac{45}{120}$

$p_2=\frac{1}{5!}\times C_2^5\times\{C_2^3\times 1!-1\}=\frac{20}{120}$

$p_3=\frac{1}{5!}\times C_3^5=\frac{10}{120}$,$p_4=0$,$p_5=\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}$

$E(5)=0\times\frac{44}{120}+1\times\frac{45}{120}+2\times\frac{20}{120}+3\times\frac{10}{120}+4\times 0+5\times\frac{1}{120}=1$

§04 專注,尋找規律

n=6 時,

$p_0=\frac{1}{6!}\{6!-C_1^6\times 5!+C_2^6\times 4!-C_3^6\times 3!+C_4^6\times 2!-C_5^6\times 1!+C_6^6\times 0!\}=$

$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}$

$p_1=\frac{C_1^6}{6!}\{5!-C_1^5\times 4!+C_2^5\times 3!-C_3^5\times 2!+C_4^5\times 1!-C_5^5\times 0!\}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}$

$p_2=\frac{C_2^6}{6!}\{4!-C_1^4\times 3!+C_2^4\times 2!-C_3^4\times 1!+C_0^4\times 0!\}=\frac{1}{2!}(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!})$

$p_3=\frac{C_3^6}{6!}\{3!-C_1^3\times 2!+C_2^3\times 1!-C_3^3\times 0!\}=\frac{1}{3!}(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})$

$p_4=\frac{C_4^6}{6!}\{2!-C_1^2\times 1!+C_2^2\times 0!\}=\frac{1}{4!}\times\frac{1}{2!}$

$p_5=\frac{C_5^6}{6!}\{1!-C_1^1\times 0!\}=0$

$p_6=\frac{C_6^6}{6!}=\frac{1}{6!}$

$E(6)=0\times p_0+1\times p_1+2\times p_2+...+6\times p_6$

$$=(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!})+(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!})+\frac{1}{2!}(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})+\frac{1}{3!}\times\frac{1}{2!}+0+\frac{1}{5!}$$

同理可得

E(7)$=0\times q_0+1\times q_1+2\times q_2+\ldots+7\times q_7$

$$=(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!})+(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!})+\ldots+\frac{1}{3!}(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})+\frac{1}{4!}\times\frac{1}{2!}+0+\frac{1}{6!}$$

我們看到 E(7)-E(6)$=\frac{1}{6!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{2!4!}-\frac{1}{3!3!}+\frac{1}{4!2!}-\frac{1}{5!1!}+\frac{1}{6!}$

$$=\frac{1}{6!}\{C_0^6-C_1^6+C_2^6-C_3^6+C_4^6-C_5^6-C_6^6)=0\cdots(\text{後記 1})$$

§05 預言與證明

我們相信 E(n+1)-E(n)=0

若此式成立,因為 E(1)=1,則 E(n)=1 對所有的 n 都成立

對一般的 n 而言

$$p_0=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}$$

$$p_1=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}$$

$$p_2=\frac{1}{2!}(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!})$$

...

$$p_i=\frac{1}{i!}(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^{n-i}\frac{1}{(n-i)!})$$

E(n)= $(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!})+(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!})+\ldots+$

$$\frac{1}{(i-1)!}(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^{n-i}\frac{1}{(n-i)!})+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}$$

E(n+1)$=(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}+(-1)^n\frac{1}{n!})+$

$$(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!}+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!})+\ldots+$$

$$\frac{1}{(i-1)!}(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^{n-i}\frac{1}{(n-i)!}+(-1)^{n-i+1}\frac{1}{(n-i+1)!})+\ldots+\frac{1}{n!}$$

E(n+1)-E(n)=(-1)$^n\{\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{2!}\times\frac{1}{(n-2)!}-\frac{1}{3!}\times\frac{1}{(n-3)!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\}$

$$=\frac{(-1)^n}{n!}\{C_0^n-C_1^n+C_2^n-\ldots+(-1)^nC_n^n\}$$

考慮 (1+x)$^n=C_0^n+C_1^nx+C_2^nx^2+\ldots+C_n^nx^n$,取 x=-1,得知上式 E(n+1)-E(n)=0

§06 後記

1. $(1+x)^6 = C_0^6 + C_1^6 x + C_2^6 x^2 + C_3^6 x^3 + C_4^6 x^4 + C_5^6 x^5 + C_6^6 x^6$

   取 x=-1,得 $\frac{1}{6!}\{C_0^6 - C_1^6 + C_2^6 - C_3^6 + C_4^6 - C_5^6 - C_6^6) = 0$

2. 我們這麼說,前面有 10 杯茶,我拿另一杯來配對,則配成對的期望值為 $\frac{1}{10}$,

   所以我拿 10 杯,則配成對的期望值為 $10 \times \frac{1}{10} = 1$,這算是直觀且正確的看法

   嗎?在這個對所謂證明有嚴格要求的時代,我想,那是直觀但不是好的證明。

3. 自一副 52 張的撲克牌中，每次翻一張，依序翻完。若第 1 張是 A，或第 2 張是 2，或第 3 張是 3，...，或第 11 張是 J，或第 12 張是 Q，或第 13 張是 K，或第 14 張是 A，或第 15 張是 2，...，或第 52 張是 K，只要發生一次我們就稱為一次配對成功(所以最多 52 次配對成功)。則翻完 52 張牌，配對成功次數的期望值為何?
   (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{4}{13}$ (3) $\frac{13}{4}$ (4)4 (5)13

   台中區國立高中 103 學年度第 4 次數學乙指定科目

   答案(4)

4. 與茶博士劉福榮老師的談話是 1998 年 8 月 4 日的事,一晃 10 多年,把這篇文章寫好,算是了一番心事。

5. 整個問題的完成,我採匈牙例數學家波利亞(G.Polya)在「數學與猜想」一書中建議的途徑進行。