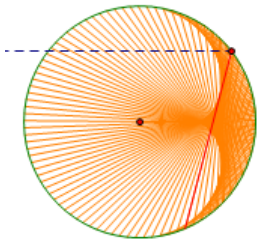
§ 楔子



早上 10 點左右，在台中鬧區，老樹咖啡屋。陽光在溫馴中又有點亮眼。讓咖啡杯轉向陽光，取了一個適當的角度，於是，在咖啡上出現一個漂亮的金黃色愛心線。

10 幾年前,我在衛道中學聽一位同事說，他要帶學生作一篇關於包絡線的科展，那時候 GSP 還沒有引進台灣，我想:到底什麼是包絡線？

後來 GSP 出現江湖，我覺得 GSP 真是表現包絡線的一個很好的工具，所謂工欲善其事，必先利其器，GSP 的動態表現(由視覺上)讓我們能充分理解何謂包絡線。

§1 曲線族

在高中課程中,曲線族是一個重要概念。試舉一例:

兩直線 $L:a_1x+b_1y+c_1=0$，$M:a_2x+b_2y+c_2=0$ 交於點 A；則對任意實數 k，

$L_k:(a_1x+b_1y+c_1)+k(a_2x+b_2y+c_2)=0$--- (1)表示通過點 A 的直線族。

反之，通過 L、M 兩線交點的直線一定能表為(1)的形式。

科學教育月刊上有一篇不錯的文章(參考書目 1，證明的部分請看文章內容)，我把它稱為"同軸曲線族"。過其上任一點 P 的切點的弦會被"直徑"平分。

例 $25x^2+4y^2=100$，P(-1,4)，求以 P 為中點的弦方程式

因為 $25x^2+4y^2=100$ 的同軸曲線族 $25x^2+4y^2=k$，通過 P，所以 k=25+64=89

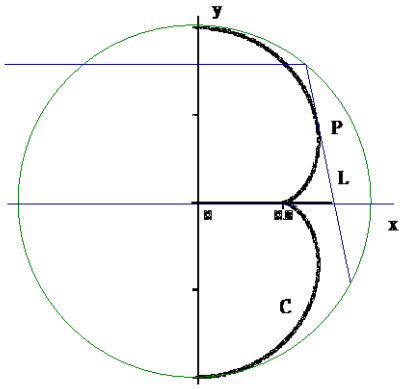
過 $25x^2+4y^2=89$ 上的點 P(-1,4)的切線為 $25x-16y=-89$ 即為所求。

(註 $y=2x^2-3x+2$ 的同軸曲線族為 $y=2x^2-3x+k$； $xy=4$ 的同軸曲線族為 $xy=k$)

§2 包絡線的理論

假設一曲線族的方程式為 f(x,y,c)=0，在平面上某區域內每一點至少有一曲線族的曲線通過。如果有一曲線 C，使得 C 上的每一點都與 f(x,y,c)=0 的某一曲線相切，則稱為此曲線族包絡出曲線 C，C 稱為曲線族 f(x,y,c)=0 的包絡線。

若 P 是 C 上一點，則曲線 C 與曲線族 f(x,y,c)=0 提供 P 點的曲線(右圖中的 L)在 P 點相切。



把 y，c 看成 x 的函數，f(x,y,c)=0 對 x 微分，得 $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial c}\frac{dc}{dx}=0$，其中 $\frac{dy}{dx}$ 是包絡線上的切線方向。

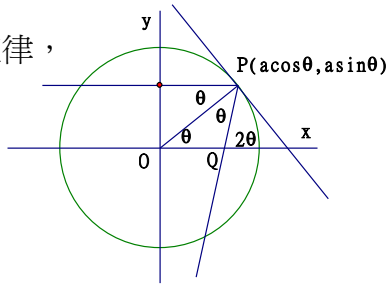
從另一方面看，對某固定的參數 c，L_c 是曲線族 f(x,y,c)=0 中經過 P(x,y)的一特定曲線，滿足 $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$，其中 $\frac{dy}{dx}$ 是曲線 L_c 的切線方向，這兩個切線方向是一致的，所以 $\frac{\partial f}{\partial c}\frac{dc}{dx}=0$

所以包絡線滿足 $\begin{cases} f(x,y,c)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial c}(x,y,c)=0 \end{cases}$

(註:Leibniz1646~1715 在 1692 年確立了包絡線理論。)

§3 計算

假設杯子是一半徑為 a 的圓，圓心在原點。入射光線平行 x 軸，交圓於 P 點，反射光交 x 軸於 Q 點，假設 $\angle POX=\theta$，由反射定律，知，$\angle PQX=2\theta$，直線 $\overline{PQ}$ 的方程式為



$\frac{y-a\sin\theta}{x-a\cos\theta}=\tan 2\theta$，即

$f(x,y,\theta)=x\sin 2\theta-y\cos 2\theta-a\sin\theta=0$，$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

是一以 θ 為參數的直線族。

這些直線族包絡出的曲線稱為此曲線族的包絡線。此包絡線上任一點的切線就是一條反射線。

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}=2x\cos 2\theta+2y\sin 2\theta-a\cos\theta=0$$

解 $\begin{cases} f(x,y,\theta)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta}(x,y,\theta)=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x\sin 2\theta - y\cos 2\theta = a\sin\theta \\ x\cos 2\theta + y\sin 2\theta = \dfrac{1}{2}a\cos\theta \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin 2\theta & -\cos 2\theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta \end{vmatrix} = 1,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} a\sin\theta & -\cos 2\theta \\ \dfrac{1}{2}a\cos\theta & \sin 2\theta \end{vmatrix} = a(\sin\theta\sin 2\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\cos 2\theta)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \sin 2\theta & a\sin\theta \\ \cos 2\theta & \dfrac{1}{2}a\cos\theta \end{vmatrix} = a(\frac{1}{2}\sin 2\theta\cos\theta - \sin\theta\cos 2\theta)$$

因此此包絡線方程式為 $\begin{cases} x = a(\sin\theta\sin 2\theta + \dfrac{1}{2}\cos\theta\cos 2\theta) \\ y = a(\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\cos\theta - \sin\theta\cos 2\theta) \end{cases}$

$$\frac{1}{a^2}(x^2+y^2) = (\sin 2\theta\sin\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\cos\theta)^2 + (\frac{1}{2}\sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta)^2$$

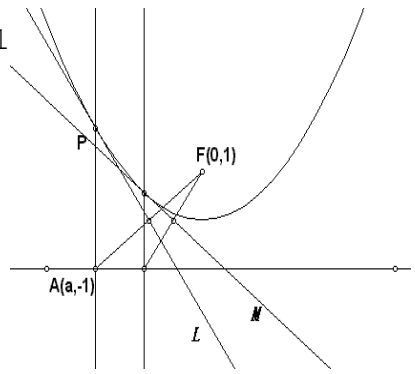
$= \sin^2\theta(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) + \dfrac{1}{4}\cos^2\theta(\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta)$ (中間有兩項正負消掉了) $= \sin^2\theta + \dfrac{1}{4}\cos^2\theta = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\sin^2\theta$

$$y = a(\frac{1}{2}\sin 2\theta\cos\theta - \sin\theta\cos 2\theta)$$
$$= a[\sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta(1-2\sin^2\theta)] = a[\sin\theta(1-\sin^2\theta) - \sin\theta(1-2\sin^2\theta)]$$
$$= a\sin^3\theta$$

消掉 θ,得 $\dfrac{1}{a^2}(x^2+y^2) - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}(\dfrac{y}{a})^{\frac{2}{3}}$

§4 另一個例子,另一種做法

F(0，1)是一定點；動點 A(a，-1)在直線 X: y=-1 上動，過 A 作 X 的垂線與線段 $\overline{AF}$ 的中垂線 L，當 A 在 X 上動時，L 包絡出一條曲線 C



L:$(x-a)^2+(y+1)^2=x^2+(y-1)^2$

$f(x,y,a)=2ax-4y-a^2=0$…(1)

另一條直線 M:$f(x,y,a_1)=2a_1x-4y-a_1^2=0$

設 P 是 L、M 的交點,滿足 $f(x,y,a)-f(x,y,a_1)=0$

$2(a-a_1)x-(a^2-a_1^2)=0$

讓 a_1->a,則 x-a=0…(2),(1),(2)消去 a，得到 $x^2=4y$，即為包絡線 C 的方程式。

§5 習作

1. 直線 L_0:ax+by+c=0 與圓 C_0:$x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 相交於 P_1、P_2 兩相異點。若 k 為一實數，則顯然 C $x^2+y^2+dx+ey+f+k(ax+by+c)=0$ 通過 P_1，P_2 兩點。

   試證:任一通過 P_1,P_2 兩點的圓必為 $x^2+y^2+dx+ey+f+k(ax+by+c)=0$，其中 k 為某一實數。(1988 年台大數學系推甄)

2. 圓 A(0,0)，半徑=6，B(-3,0)。設 P 是圓上之動點，L_P={線段 $\overline{BP}$ 的垂直平分線}，求 L_p 的包絡線。

3. 求直線族 $F(a,b)=\{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \mid a^2+b^2=1, ab\neq 0\}$ 的包絡線。

4. 103 年 北一女教師甄試考了這個題目：

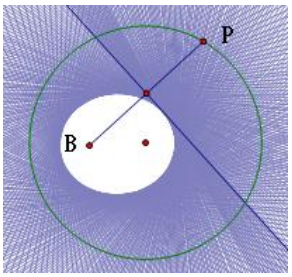
   一線段 L 與 x 軸的交點為 A(t，0)，與 y 軸的交點為 B(0，1-t)，$0\le t\le 1$。則此線段所產生的軌跡圖形與 x、y 軸所圍成的區域面積=？

習作解答

1. 假設通過 P_1,P_2 的圓為 $x^2+y^2+d'x+e'y+f'=0$

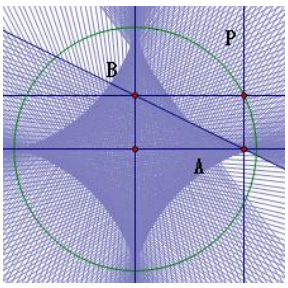
   則 $(x^2+y^2+d'x+e'y+f')-(x^2+y^2+dx+ey+f)=0$ 顯然表示通過 P_1、P_2 的直線；所以 $(d'-d)x+(e'-e)y+(f'-f)=0$ 即直線 ax+by+c=0,故存在一實數 k，使得 d'-d=ka,e'-e=kb，f'-f=kc，

   d'=d+ka，e'=e+kb，f'=f+kc，得證。



2. $12x^2+16y^2+36x-81=0$ 為一橢圓。

3.(取一單位圓,P 是圓上一動點,過 P 作 x、y 軸的垂線，垂足為 A，B，則直線 $\overline{AB}$：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 就是直線族的一直線，即包絡線的切線，讓 P 點在圓上動，則動線 $\overline{AB}$ 的包絡線即為所求,其方程式是 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$)

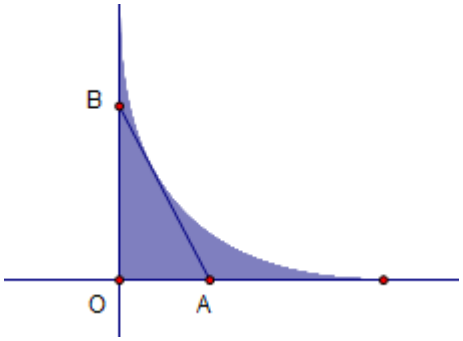


4. 線段 $\overline{AB}$ 滿足 $\frac{x}{t}+\frac{y}{1-t}=1$，則

f(x,y,t)=(1-t)x+ty-t(1-t)=0

$\frac{\partial f}{\partial t}=-x+y-1+2t=0$，消去參數 t，化簡得

$x^2-2xy+y^2-2x-2y+1=0$，是對稱軸為 x-y=0 的拋物線(線段 $\overline{AB}$ 包絡出來的曲線，如右圖)。



$(x-y-1)^2=4y$，$x-y-1=\pm 2\sqrt{y}$

$x=y\pm 2\sqrt{y}+1$，$\sqrt{x}=\pm(\sqrt{y}\pm 1)$，因為圖形在第一象限，且通過(1,0)、(0,1)

取 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$。

$\sqrt{y}=1-\sqrt{x}$；$y=1-2\sqrt{x}+x$

與 x，y 軸所為區域面積=$\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)dx=x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{1}{6}$

§6 後記

台中，新光三越前，噴泉隨著重金屬的樂音揮灑，時而高亢，時而低訴。幾個小孩在旁邊玩水，衣褲盡濕。噴泉的水柱構成完美的包絡面，聰明的你請告訴我，甚麼是時間。

§7 參考書目與註

1. 科學教育月刊 221 期 (基隆市私立二信高中 楊健民)p.15

"同軸曲線族",過其上任一點 P 的切點的弦會被"直徑"平分。

2. 牛頓雜誌 1990/6[康明昌]

3. 100 Great Problems of Elementary Mathematics p.220 A parabola as envelope

4. 微積分上冊凡異出版社(華羅庚)p.90

5. 數學分析導引下冊(華羅庚) p.134

6. 劇變論入門 蕭欣忠 呂素齡 譯 p.102

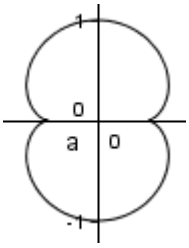
7. 包絡線

http://210.60.224.4/ct/content/1990/00060246/0017.htm

8. (註)對一些 Geogebra 的愛用者,腎臟線的指令如下:

curve[sin(t)*sin(2t)+1/2 cos(t)*cos(2t),

1/2 sin(2t)*cos(t)-sin(t)*cos(2t),t,$-\pi,\pi$]

或 curve[(3/2)cos(t)-(cos(t))^3,(sin(t))^3,t,$-\pi,\pi$]

得到右圖形。