一.Cramer 公式

§01 楔子

解二元一次聯立方程組$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$

設$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$, $\Delta_x=\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}$,$\Delta_y=\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$,當$\Delta\neq 0$時,克拉瑪(Cramer)公式

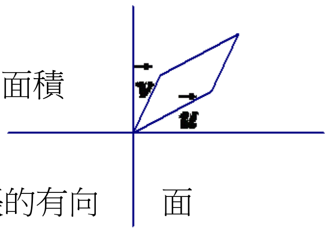
說:$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta},y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$

顯見聯立方程組解的幾何意義是面積比。

但是幾乎所有的課本都是用加減消去法解出 x,y,沒有呈現幾何(面積)意義。這件事我注意了很久,95 課程暫行綱要如此,我以為 99 課程綱要會改變,但是並沒有改變。

我以為用加減消去法解出聯立方程式的解,並不能宣稱為其"幾何意義"。

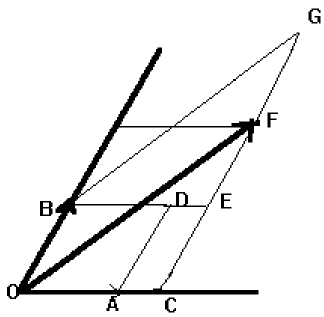
§02 行列式的幾何意義



$\vec{u}=(a_1,b_1),\vec{v}=(a_2,b_2)$是兩平面向量,則$\vec{u},\vec{v}$所張的平行四邊形面積

$\left|\vec{u}\wedge\vec{v}\right|=\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}\right\|$,取$\vec{u}$到$\vec{v}$為逆時針方向,則$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$為$\vec{u},\vec{v}$所張的有向 面積。這件事在所有的課本都會有證明,所以我們就略過。

§03 其實,驗證其幾何意義不難。



把$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$改寫成$x\vec{u}+y\vec{v}=\vec{w}$

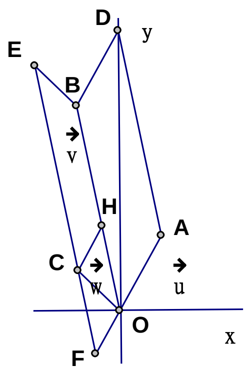
其中$\overline{OA}=\vec{u}=(a,d)$, $\overline{OB}=\vec{v}=(b,e)$, $\overline{OF}=\vec{w}=(c,f)$

則$x=\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OA}}=\dfrac{\text{▱}OCEB}{\text{▱}OADB}=\dfrac{\text{▱}OFGB}{\text{▱}OADB}=\dfrac{\det(w,v)}{\det(u,v)}=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$

同理可知 $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$

以上所述之 det(u,v)表示向量$\vec{u},\vec{v}$所張的有向面積,所以 x,y 當然有可能是負數。

例:L 是通過 A(1,2)、B(3,4)的直線，M 是通過 C(-2,1)、D(5,-2)的直線，求兩直線的交點坐標



解出 L:x-y=-1，M:3x+7y=1，令$\vec{u}=(1,3),\vec{v}=(-1,7),\vec{w}=(-1,1)$

則$x\vec{u}+y\vec{v}=\vec{w}$，右圖中，$\overline{OA}=\vec{u}$，$\overline{OB}=\vec{v}$，$\overline{OC}=\vec{w}$

將$\vec{w}$表示為$\vec{u},\vec{v}$的線性組合:

過 C 作$\overline{OA}$的平行線交直線$\overline{OB}$於 H，過 C 作$\overline{OB}$的平行線交直線$\overline{OA}$於 F

則 x=$-\frac{\overline{OF}}{\overline{OA}}$ (因為在$\overline{OA}$的反方向)，根據 Cavalieri 原理，

$\frac{\overline{OF}}{\overline{OA}}=\frac{▱OBEC}{▱OADB}=\frac{\left\|\vec{v}\wedge\vec{w}\right\|}{\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|}$，即$x=\frac{\left|\vec{w}\wedge\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\wedge\vec{v}\right|}$，其中$\left|\vec{w}\wedge\vec{v}\right|$表示有向面積，目前由$\vec{w}$到$\vec{v}$是順時針方向，此有向面積為負。

據說(因為我沒有認真研究)阿基米德用槓桿原理求出球的體積，而中國古代是用 Cavalieri 原理求出的。

Cramer 公式的重要性在於表現了 Cavalieri 原理。

三階行列式表示有向體積,想必三元一次聯立方程組的 Cramer 公式也可以這樣做。

§04 後記

以上做法是我大一時(1972 年)楊維哲先生教的，我的疑問是「為什麼課本不這麼證明?」

1. 寫書的教授不知道這樣證明。但是這不太可能。
2. 反正考試不會考證明(例如學測)，那就有交代就好。就像吳念真先生講的:台灣人、有就好，快就好，爽就好。
3. 其他不明原因

§05 參考資料

1. http://mathworld.wolfram.com/CramersRule.html
2. 微積分入門 p.15　　　　　康明昌先生 故鄉出版社
3. http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_15_3_08/index.html

二. 測量師公式

A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)是平面上四個點，則四邊形 ABCD 的面積=

$$\frac{1}{2}\begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C & D & A \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix} \end{array} = \frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1-x_1y_4-x_4y_3-x_3y_2-x_2y_1)$$

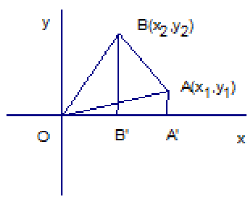
稱為測量師公式，聰明的學生就問了:是行列式嗎?

第一次我說:不是。後來想一想就說是:"加長型"行列式。何以故?

我們來看看證明。

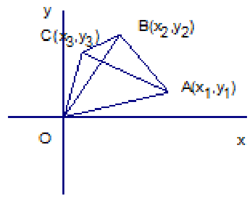
(1)如右圖, $\Delta OAB = \Delta OB'B + AA'B'B - \Delta OA'A$

$$= \frac{1}{2}x_2y_2 + \frac{1}{2}(y_1+y_2)(x_1-x_2) - \frac{1}{2}x_1y_1 = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

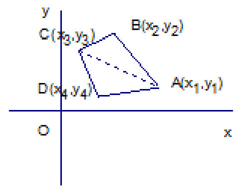


(2)如右圖,$\Delta ABC = \Delta OAB + \Delta OBC - \Delta OAC$ (由(1))

$$=\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) - \frac{1}{2}(x_1y_3 - x_3y_1)$$



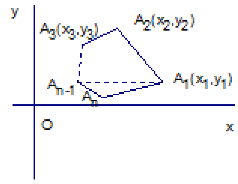
$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$



(3)如右圖,$ABCD = \Delta ABC + \Delta CDA$ (由(2))

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} +$$

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & x_4 & x_1 & x_3 \\ y_3 & y_4 & y_1 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$$



當然,n 個點形成的 n 邊形如右圖，面積

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_1 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} & y_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n & x_1 & x_{n-1} \\ y_{n-1} & y_n & y_1 & y_{n-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & y_1 \end{vmatrix}$$

我們注意其過程，就是幾個行列式一直疊在一起，所以說，測量師公式就是”加長型”行列式。

測量師公式可以推到 Green 定理,請看參考資料。

三.畢氏定理推廣

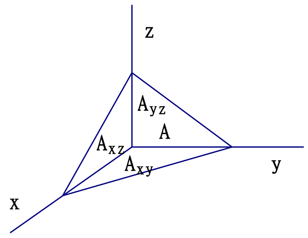
$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 是兩空間向量,則 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 所張的平行四邊形面積

$$\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2} \cdots (※)$$ 。其幾何意義為何?

我們先看看畢氏定理說什麼,假設線段 L 長為 l ,其在 x , y 軸的投影長為 l_x , l_y 則

畢氏定理說 $l^2 = l_x{}^2 + l_y{}^2$ 。

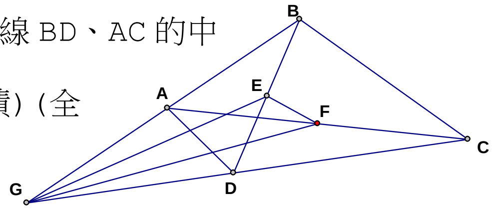
$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$表示$\vec{a},\vec{b}$所張的平行四邊形 A 在 yz 平面的投影面積，我們用 A_{yz} 表示，則(※)表示 $A^2=A_{yz}^2+A_{xz}^2+A_{xy}^2$，正是畢氏定理推廣到二維的情形。



我高中時看到(※),認出它就是畢氏定理推廣，當時還蠻得意的，所以念數學系，這有點關係。

§ 習作

1．設四邊形 ABCD 的邊 BA、CD 的延長線交於 G，對角線 BD、AC 的中點為 E、F，則ΔGEF 的面積=$\frac{1}{4}$(四邊形 ABCD 的面積)(全國高中數學競賽 2005 中區 嘉義一)



§6 參考資料

4．從醉月湖的面積談起------蔡聰明
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_21_2_01/index.html
5．Green 定理與應用------------林琦焜
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_21_4_03/index.html
6．笛卡爾之夢--九章出版社 p.267
7．傳播季刊 47 期:From Pythagoras to Grassmann..畢氏定理高維方面的推廣

習作解答

lemma

若$\vec{a}\wedge\vec{b}$表示$\vec{a},\vec{b}$的有向面積，則(1) $\vec{b}\wedge\vec{a}=-\vec{a}\wedge\vec{b}$ (2) $\vec{a}\wedge(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\vec{c}$

進入證明

$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{GF}\wedge\overrightarrow{GE}\right|=\Delta GEF$ 的面積，由分點公式知$\overrightarrow{GF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA})$、$\overrightarrow{GE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GB})$

所以$\overrightarrow{GF}\wedge\overrightarrow{GE}$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA})\wedge\frac{1}{2}(\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GB})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{GA}\wedge\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA}\wedge\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}\wedge\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\wedge\overrightarrow{GD})$$

$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{GA}\wedge\overrightarrow{GD}-\overrightarrow{GB}\wedge\overrightarrow{GC})$$

其中$\overrightarrow{GA}\wedge\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GC}\wedge\overrightarrow{GD}=0$ (逆時針算出來的值是正的,順時針算出來的值是

負的)，這表示$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{GF}\wedge\overrightarrow{GE}\right|=\frac{1}{4}\times(\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{GB}\wedge\overrightarrow{GC}\right|-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{GA}\wedge\overrightarrow{GD}\right|)=\frac{1}{4}$（$\Delta GBC-\Delta GAD$）

$=\frac{1}{4}$(四邊形 ABCD 面積)，得證。