§01 楔子

去年衛道中學小六考國中,考了一題連分數,大致上是這樣子的。例如

$\frac{25}{11}=2+\frac{3}{11}=2+\frac{1}{\frac{11}{3}}=\ldots=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$ 用[2,3,1,2]表示。

十多年前高中有教到連分數,用輾轉相除法求之。項武義先生在「微積分」一書中說:微積分用來用去主要的就是「逼近法」這麼單斧直攻的一招。(註 1)

$$\begin{array}{c|cc|c}
2 & 25 & 11 & 3 \\
 & 22 & 9 & \\
\hline
1 & 3 & 2 & 2 \\
 & 2 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 0 &
\end{array}$$

我們在修習代數數論時,知道「連分數逼近法」是一個非常有效的逼近法,因此,雖然 95、99 課綱不上連分數, 現在漫談連分數這就不會那麼奇怪了。

§02 日食

日食的形成原因是因為太陽、月球、地球剛好在同一條直線上，月球恰巧將太陽遮住，所以在地球上的某些區域無法看到太陽。

如果單從月相變化來看，每當月亮位於「朔」的位置，似乎就應該產生日食，但實際上卻並不是如此。

原因就是地球繞太陽公轉的平面（黃道面）與月球繞地球公轉的平面（白道面）有一個大約五度的夾角，必須日、月兩者的位置相距在一度內，才能產生日食現象；所以必須等到地球繞太陽公軌道的位置，剛好位於白道面與黃道面的兩個交點（升交點、降交點）才有可能發生日食的現象，亦即必須符合這兩個條件才有可能發生日食的現象。

如果月球位於朔的位置，且恰巧位於白道與黃道的兩個交點上，就有可能發生日食。月相盈虧的平均週期約為 29.530588 天(稱為朔望月)，而月球穿過同一黃道面的交點週期為 27.212220 天(稱為交點月)。

§03 連分數

交點週期=27.212220 日(交點月),朔望週期=29.530588 日(朔望日)

設 S=n 個朔望月=m 個交點月,則 $\frac{m}{n}=\frac{29.530588}{27.212220}$ ，將它

用連分數表示$=1+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\ldots}}}}}}$

這個連分數的一,二,三,...次近似值(漸進分數)為$\frac{12}{11},\frac{13}{12},\frac{38}{35},\frac{51}{47},\frac{242}{223},\ldots$，

取到第五次近似值,即$\frac{m}{n}=\frac{242}{223}$，此時可取

m=242 交點月=6585.3572 日，n=223 朔望月=6585.3211 日。

它們相差0.0361日,因此6585.3211日近似地看成朔望月與交點月的公倍數。

朔望月與交點月的最小公倍數大約為 6585.32 天，這個週期便是沙羅週期。

6585.32 天,大約是 223 個朔望月,因此也常用 223 個朔望月來代表沙羅週期。

沙羅週期(Saros cycle)是巴比倫人發現的,經過一個沙羅週期,太陽,地球,月球回到相似的幾何位置,於是發生幾乎相同的蝕。

§04 日食預測

西元前 6~7 世紀,伊朗高原的米底亞王國(Medes,今日伊朗、阿富汗北部、土耳其東部地區)向西征服了亞述帝國,占領它的首都尼尼微,然後繼續西進小亞細亞,遇到了米底亞王國(Lydians,今日土耳其西部)，兩國在哈利斯(Halys 今柯茲勒河)發生劇烈戰爭，連續五年未見勝負，橫屍遍野。

泰勒斯(Thales 約 620BC~546BC)是希臘的數學家,哲學家,天文學家,比畢達哥拉斯年長一些,他預知 5 月 28 日下午 3 點(585 年 BC)會有日全食，於是他向交戰兩國宣布：上天對這場戰爭十分厭惡，將用日食向你們示警，若你們再不休戰，將有大難臨頭。

交戰雙方都不理會泰勒斯的警告，直到交戰時真的發生了日食，白晝變成黑夜,他們非常恐懼，於是歃血為盟,結束了戰爭。

這件事紀錄於古希臘歷史學家希羅多德(Herodotus 484BC~425BC)的著作希波戰爭史第一卷。

泰勒斯到過巴比倫,他能預測日食,顯然他遊學巴比倫期間學得了巴比倫的天文學。

§05 後記

連分數一般的演算法是由 P.A.Cataldi(1548~1626)在 1613 年提出,第一次有系統的研究是尤拉(L.P.Euler 1703~1783)於 1737 年提出。

至於國內,沈昭亮先生是我所知道的教授中,連分數的專家,參考資料中(5)(6)是他發表的連分式。

十多年前,我當數學科召集人,請沈昭亮教授到學校演講「連分數」,沈教授千里迢迢從新竹到台中,但是 (1)學校為了"不耽誤"學生課業,就只找 2,30 位學生來聽 (2)學生沒有準備,因此與教授互動不足。

當時對沈教授的歉意一直在心上,至今猶不能忘懷。在此利用這個機會,向沈教授致上一個遲來的歉意。

§ 參考資料

1.(註 1)微積分 p.145 萬人出版社 項武義
2.沙羅週期
https://en.wikipedia.org/wiki/Saros (astronomy)
3.認識連分數 林聰源
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm 02 3 08/index.html (包含黃金比例,π 的連分數表示法)
4.黃金比例的連分數
http://case.ntu.edu.tw/hs/wordpress/?p=39270
5.秋風夜雨 話蚯蚓 談連分數 沈昭亮 數學傳播季刊 27 卷第 2 期
6.連分式與反面問題 沈昭亮 數學傳播季刊 27 卷第 3 期
7.數學史---古典篇 p.82 凡異出版社
8.唐宋曆法中的交食週期與連分數算法 曲安京 數學傳播季刊 19 卷第 4 期