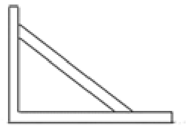
§ 尺規作圖

我國古代以規矩作圖，規就是圓規，矩由長短兩尺合成，相交成一直角。尺上有刻度，短尺叫勾，長尺叫股，為了堅固起見，兩者之間還連上一條竿。



相較之下，古希臘人研究幾何問題，限制 1.使用沒有刻度的尺與圓規 2.在有限步驟內作圖。提出如此限制的大概是 Oenopides(公元前 465 年)，以後由於柏拉圖的大力提倡，歐幾里德又把它總結在"幾何原本"中。

為什麼中國人的尺有刻度，希臘人的尺沒有，這與文化的發展有關，大致上是這樣說的，中國古代數學發展是偏向歸納、實用，而希臘人是偏向演繹與哲學思考。現在，我們把尺規作圖當作是"演算法"的一個例子。

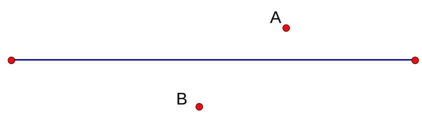
國中尺規作圖的課題:主要是 1.垂直 2.平分的幾何性質 其中

(1)線段的中垂線性質:線段的平分線上任一點到線段兩端等距,反之,到線段兩端等距的點落在中垂線上。

(2)角平分線的性質:角平分線上任一點到角的兩邊等距,反之,到角兩邊等距的點落在角平分線上。

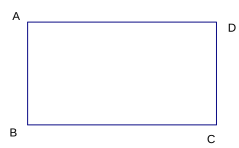
◇習作◇

1. 兩圓外離,用尺規作圖作兩圓的外公切線。

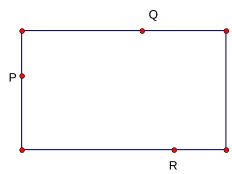


2. A,B 在直線 L 的兩側,C 在 L 上,且 ΔABC 為等腰三角形,則這樣的 C 點最多有幾個?

3. 一矩形 ABCD,求作一點 P,使得 P 點到直線 $\overline{CD}$ 的距離 $=\overline{PA}=\overline{PB}$



4. 矩形的水池 ABCD 邊上有三個救生員在 P,Q,R 三點,他們的責任區如何劃分?



◇後記◇

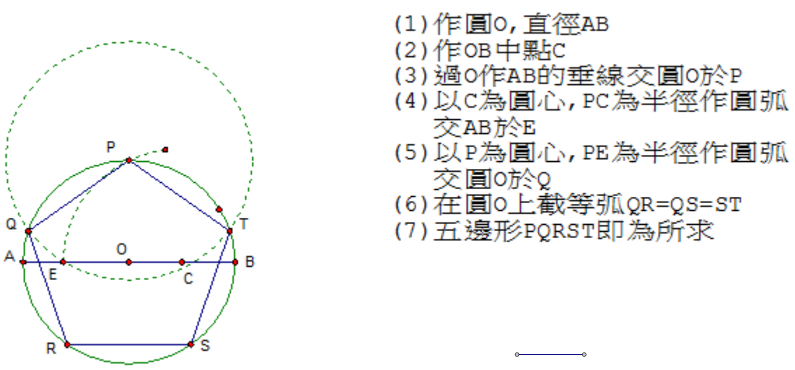
1. 介紹尺規作圖的文章很多,像平面幾何新路,華羅庚科普選集,傳播季刊都有,最有學問的是大概與計算幾何(Computational Geometry)有關的書。
2. 歐幾里德對幾何的主要貢獻有二:1.幾何證明的公設法 2.歐幾里德建構法:包含一個演算法(algorithm)與證明的基模(schema)。符合了現代演算法的所有要求,即清楚的 (unambiguous),確切的(correct),有限步驟的(terminating)。
3. 波斯數學家阿勒-霍瓦里松在825年左右寫了一本"代數對話錄",提出"演算法"一詞 。
4. Lorenzo Mascheroni(1797年)證明只用圓規可以作所有尺規作圖的題目,震驚了數學界,後來發現 Georg Mohr 在1672年已經證明了此事。比較簡單的證明是用圓的反演(inversion),不用反演幾何的證明請看美國數學月刊(The American Mathematical Monthly)101卷8期。
5. 古希臘幾何三大問題:

   (1) 方圓問題:求作一正方形,使其面積與半徑為1的圓相等。

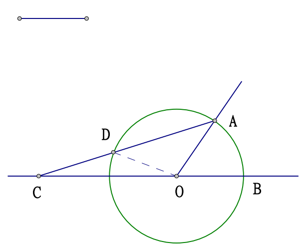
   (2) 倍立方問題:求作一個正立方體,使其體積為原正方體的2倍。(數學史---古典篇 p.145 凡異出版社)

   (3) 三等分角問題

6. 1796年,高斯(Carl Friedrich Gauss)用尺規作出正十七邊形(heptadecagon),於是決定當數學家,最後成為十九世紀最偉大的數學家。
7. 正五邊形作圖:



8. 已知任一$\angle AOB$,在一尺上作一刻度1如左上角



(1)以 O 為圓心,1 為半徑作一圓

(2)尺一端放在 C 點,使 CD 長=1,且尺的另一端與圓交於 A 點

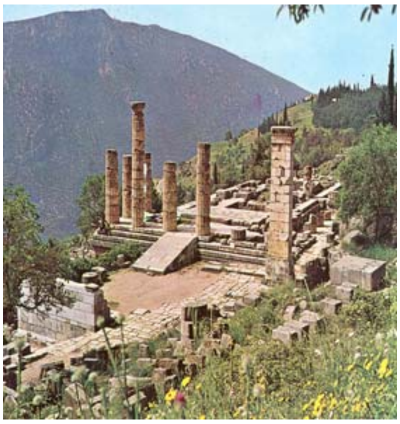
(3)則可算出 $\angle ACB=\frac{1}{3}\angle AOB$,亦即把 $\angle AOB$ 三等分。

◇參考資料◇

(1) 華羅庚科普著作選集,亞東書局 p.202~p205
(2) 皇帝新腦--藝文印書館,第二章
(3) 平面幾何新路--張景中
(4) 幾個有名的數學問題 p.45--康明昌--數學傳播季刊選輯
(5) "給平面上三點A,B,C,只能圓規作圖,求三角形ABC的外心(用反演作的)" p.25---科學教育月刊 207 期

倍立方問題

西元前 430 年，雅典與斯巴達的伯羅奔尼撒(Peloponnesian)戰爭(431BC~404BC)的第二年，雅典的勝利似乎唾手可及。這時候雅典城鬧起了鼠疫(黑死病)，人們跑到愛琴海中太陽神 Apollo 的誕生地 Delos 島，向 Delphi 的神請求神諭。神諭說必須把 Apollo 的祭壇放大為兩倍，而這個祭壇是一個正立方體。粗心的工匠於是把邊長放大為兩倍，不料天神大怒，瘟疫更加嚴重。於是他們求教於 Plato。



Plato 就抓住這個機會教訓他們:這是你們不重視數學激怒了天神的結果。(數學史---古典篇 p.120 凡異出版社)

根據 Plutarch 的說法，Plato 把問題丟給 Eudoxus,Arthytas 與 Menaechmus，但是他們因為用機械方法解決了這個問題遭到 Plato 的詰難。根據 Plato 的精神，尺規作圖必須以純幾何的方法解決。

比較重要的發展是 Hippocrates 發現倍立方問題等同於 $\sqrt[3]{2}$ 的尺規作圖，Pierre Wantzel 在 1837 年證明 $\sqrt[3]{2}$ 是不可構作的。(註:有刻度的尺或者用摺紙也可以構作 $\sqrt[3]{2}$)