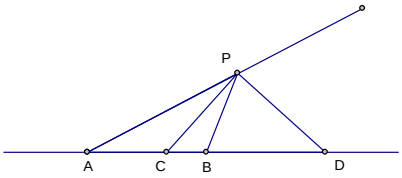
§ 把內角平分線與外角平分線的比例線段性質,加上動點軌跡的觀念,就得到阿波羅圓。

A,B 是座標平面上兩點,滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}$ 的所有 P 點的集合是 $\overline{AB}$ 的中垂線。

預備知識

1. $\overline{PC}$ 是 $\angle APB$ 的平分線,則 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$

2. $\overline{PD}$ 是 $\angle APB$ 的外角平分線,則 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$



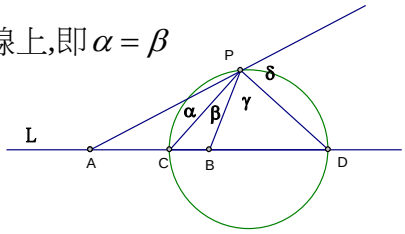
那麼滿足 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1\ldots$(※)的 P 點的集合為何?

假設 A,B 在直線 L 上,則至少有一內分點 C,一外分點 D,滿足(※)

當 P 在 L 外,若 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$,則 C 點落在 $\angle APB$ 的平分線上,即 $\alpha=\beta$

又 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$ 則 D 點落在 $\angle APB$ 的外角平分線上,

即 $\gamma=\delta$

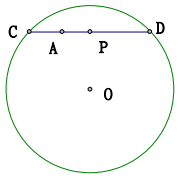


所以 $\beta+\gamma=90^0$,即 P 點落在以 $\overline{CD}$ 為直徑的圓上。

綜合以上所述,知道平面上滿足(※)的 P 點所成的集合是以 $\overline{CD}$ 為直徑的圓。此圓即稱為阿波羅圓。

§ 習作

1. A 是圓 O 內一點,通過 A 點的弦的中點軌跡為何?



後記:

§ 參考資料

1. http://mathworld.wolfram.com/ApolloniusCircle.html
2. http://www.math.ntu.edu.tw/~shing_tung/PDF/3rd/Huang.pdf 第三屆丘成桐中學數學獎佳作 超阿波羅圓漣漪