§1 楔子

1974 年,某一天,我到台大數學系圖書館還書。旁邊有個小朋友也在還書,他還 4 本書,我一時好奇瞄了一下,看到其中有兩本,一本是「何謂實數?」,一本是「類比計算機原理」。

何謂類比?

查一下維基百科:類比或類推是一種將特定事物所附帶的訊息轉移到其他特定事物之上的認知過程，且兩者不一定有實質上的同源性，其類比也不見得「合理」。在記憶、溝通與問題解決等過程中扮演重要角色;於不同學科中也有各自的定義。

這個小朋友是楊柏因,國內的第一個資優生,楊維哲教授常為他修剪鬍鬚,因為要見蔣經國先生。

§2 關於數學學習,有人說方法比內容重要。

最近因為 99 課程綱要的實施,高一上有 Lagrange 插值多項式,我們在許多地方看到關於 Lagrange 插值多項式的討論。因此,我也想寫一下關於 Lagrange 插值法與中國餘數定理的類比。

這是數學的方法,高中生嘛,除了一直解題目之外,總要在學習精神上提升一下。

§3 中國餘數定理與 Larange 差值法的內容與類比

中國餘數定理源出於三國或晉朝時的"孫子算經"一書。其中有一題:今有物不知其數,三三數之剩二,五五數之剩三,七七數之剩二,問物幾何?

以同餘式寫出,即求 x,滿足 $x \equiv 2 \pmod 3, x \equiv 3 \pmod 5, x \equiv 2 \pmod 7$

孫子算經給的答案是 x=23

聯立一元一次同餘式,後世稱為"大衍',其解法稱為"大衍求一術",到宋代數學家秦九韶集其大成。

中國餘數定理:

設整數 $m_1, m_2, \ldots, m_n$ 兩兩互質,且都大於 1, $m = m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n$。$r_1, r_2, \ldots, r_n$ 都是整數,則方程組 $x \equiv r_1 \pmod{m_1}, x \equiv r_2 \pmod{m_2}, \ldots, x \equiv r_n \pmod{m_n}$ 有解

Larange 插值法:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是不同的實數, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 是實數, 則多項式 f(x) 的方程組

$f(x) \equiv y_1 \bmod (x - x_1), f(x) \equiv y_2 \bmod (x - x_2), \ldots, f(x) \equiv y_n \bmod (x - x_n)$ 有解

(註:由餘式定理 $f(x) \equiv y_i \bmod (x - x_i)$ 即 $f(x_i) = y_i$)

兩者的證明在代數或初等數論的教科書中都可以找到, 這裡只是想呈現兩者的共同處, 所以各舉一例說明。

例 1 $x \equiv 2 (\bmod 3), x \equiv 3 (\bmod 5), x \equiv 2 (\bmod 7)$, x=

解 $\begin{cases} 3 \mid x - 2 \ldots (1) \\ 5 \mid x - 3 \ldots (2) \\ 7 \mid x - 2 \ldots (3) \end{cases}$, 設 $x = 3 \times 5 \times 7t + 3 \times 5a + 5 \times 7b + 3 \times 7c$, 代入(1)中, 得 $3 \mid 35b - 2$,

取 b=1, x 代入(2)中, 得 $5 \mid 21c - 3$, 取 c=3, x 代入(3)中, 得 $7 \mid 15a - 2$, 取 a=2

所以 x=105t+30+35+63=105t+128=105(t+1)+23, 所以 x 的最小值=23

例 2 若多項式 f(x) 滿足 f(1)=4, f(2)=9, f(-4)=39 則 f(x)=

即 $\begin{cases} x - 1 \mid f(x) - 4 \ldots (1) \\ x - 2 \mid f(x) - 9 \ldots (2) \\ x + 4 \mid f(x) - 39 \ldots (3) \end{cases}$, 設

f(x)=(x-1)(x-2)(x+4)q(x)+a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x+4)+c(x-1)(x+4)

代入(1), 得 $x - 1 \mid b(x-2)(x+4) - 4$, b(1-2)(1+4)-4=0, b= $-\frac{4}{5}$

同理, 代入(2), 得 $c = \frac{9}{6}$; 代入(3), 得 $a = \frac{39}{30}$

最低次的多項式為 $\frac{39}{30}(x-1)(x-2) - \frac{4}{5}(x-2)(x+4) + \frac{9}{6}(x-1)(x+4)$

乘開化簡為 $2x^2 - x + 3$

我們注意到的是例 1 與例 2 中解法的共同處, 也就是說「大衍求一, 其術相同」。所謂「術」, 用現代的看法就是「演算法」, 所以我們可以設計一個電腦的程式來求解。

現代代數學, 主要就是了解「代數結構」,整數 Z 與多項式 R[x]的代數「結構」一樣,這是中國餘數定理與 Lagrange 插值法可以做類比的原因。

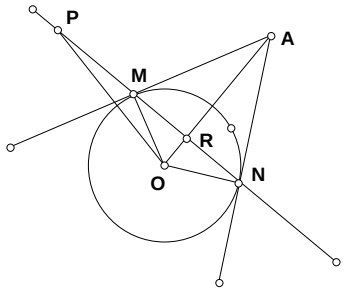
§另一個類比:球面與圓是最佳類比。

例 1 (1)A(3,5),圓 C: $(x-2)^2+(y+1)^2=4$,過 A 作圓 C 的切線,假設切點為 M,N 求直線 $\overline{MN}$ 的方程式

(2)A(3,0,6),球面 S :$(x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=10$,過 A 作 S 的切線,則所有的切線形成一圓,求包含此圓的平面方程式。

圓 C	球面 S
包含切點的直線 L	包含切點所形成的圓的平面 E
直線 L 的方程式	平面 E 的方程式

解



(1)假設 P(x,y)是 $\overline{MN}$ 上的動點,則

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=\overline{OA}\times\overline{OR}=\overline{OM}^2=r^2$

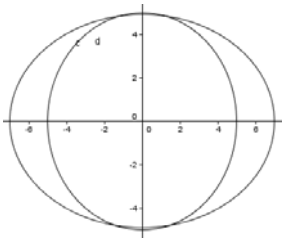
亦即 $\overline{MN}$ 的方程式為(x-3)(3-2)+(y-5)(5+1)=4

所以(2)中,平面 E 的方程式為(x-3)(3-3)+(y-4)(0-4)+(z-4)(6-4)=10

亦即 2y-z+1=0

例 2.設 S 為空間中一球面, $\overline{AB}$ 為其一直徑,且 $\overline{AB}$ =10,若 P 為空間中一點,使得 $\overline{PA}+\overline{PB}=14$,則 P 點的位置可能落在哪裡?(94 年學測)

(A)線段 $\overline{AB}$ 上 (B)直線 $\overline{AB}$ 上,但不在線段 $\overline{AB}$ (C)球面 S 上 (D)球 S 的內部,但不在線段 $\overline{AB}$ (E)球 S 的外部,但不在線段 $\overline{AB}$



空間中,滿足$\overline{PA}+\overline{PB}=14$的 P 點是橢球,但是橢球比較不好畫(而且也沒有必要),我們把問題轉化到平面上的橢圓,橢圓的 2a=14,2c=10,所以 a=7,c=5,$b^2=a^2-c^2=24$,把橢圓$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$與圓 C:$x^2+y^2=25$ 畫在一起,圖形如右。由圖形看出,橢圓上的點 P 有可能在(1)直線$\overline{AB}$上,但不在線段$\overline{AB}$,(2)圓 C 上,(3) 圓 C 的內部, 但不在線段$\overline{AB}$ (4) 圓 C 的外部,但不在線段$\overline{AB}$,(5)但不可能在線段$\overline{AB}$上,所以答案選 B,C,D,E。

也就是說,我們作如是類比:球$\leftrightarrow$圓,橢球$\leftrightarrow$橢圓

§習作

習作 1

圓	球面
面積 A(r)$=\pi r^2$	體積 V(r)$=\frac{4\pi r^3}{3}$
周長 L(r)$=2\pi r$	表面積 A(r)$=4\pi r^2$
$A'(r)=L(r)$	$V'(r)=A(r)$

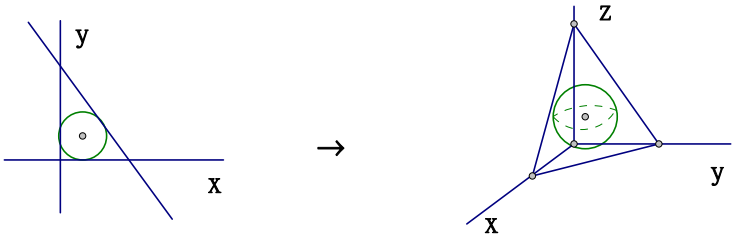
這是另一種類比,基本上是由二維推到 3 維。

你可以從證明$A'(r)=L(r)$,$V'(r)=A(r)$的過程中看到兩者的類比關係。

習作 2

O(0,0,0),A(3,0,0),B(0,6,0),C(0,0,9),求四面體 OABC 的內切球的方程式

在座標平面上考慮 O(0,0),A(3,0),B(0,6),求ΔOAB 的內切圓方程式,然後推到球面。



答案是$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$

習作 3

試證$\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}<\dfrac{\ln(n)}{n}$，對所有大於 2 的正整數 n 都成立

解 假設 $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$，則 $f'(x)=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}<0$ for $x\geq 3$，所以 f(x)在$x\geq 3$以後是漸減函數，又 f(1)=0，所以 f(n+1)<f(n)，for $n\geq 3$得證。

原命題中，n 是正整數，是離散的，好像要用數學歸納法作。定義一個連續函數 f(x)，就可以使用微積分。

§後記

實驗或觀察得到的數據是離散的(discrete)，如何由離散的數據得到連續的(continuous)函數，其方法叫做插值法，是研究自然界現象的一個重要的方法。給兩個點，我們得到一條直線。給 3 個點，我們得到一個二次函數。以此類推，就是 Lagrange 插值法。

另一個插值法的例子是關於 Gamma 函數$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ 。

對一個正整數 n，我們都知道 n!=n(n-1)(n-2)…×3×2×1，十八世紀初，數學家想知道如何去定義一個分數的階乘。直到 1729 年，尤拉(Leonhard Euler 1707~1783)才解決這個問題。

只要證明$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$，及$\Gamma(1)=1$，就可以得到推論$\Gamma(n+1)=n!$

至於尤拉是如何找到 Gamma 函數的，

http://www.maa.org/news/columns.html 中 Ed Sandifer 教授的專欄 How Euler did It?2007 年九月的文章:Gamma the Function 可以找到。

§參考資料

1. 數學發現(九章出版社)　　p.102

2. 代數學(上)(聯經出版社)(莫宗堅)p.22

3. 中國剩餘定理(許志農教授)

https://docs.google.com/viewer?url=http://math.ntnu.edu.tw/~maco/macobook/arith/8.pdf

4. Larange 插值法

http://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_polynomial

5. 龍騰數亦優第 13 期 p.17:插值多項式