

§ 01

在最近一期的數學傳播季刊(第 49 卷第 1 期矩陣與不等式)，林福林、林子喬先生的大作中提供一個可以生成不等式的方法，非常有意思。

$A=\{a_{ij}\}_{m \times n}$ 是一矩陣。若 $p>q$ ，則 $M_q(\{M_p(\{a_{ij}\}_{j=1}^n)\}_{i=1}^m) \geq M_p(\{M_q(\{a_{ij}\}_{i=1}^m)\}_{j=1}^n)$

(林老師稱此為蕎麥不等式，以下用 JM 表示)。

不等式的左邊是 M_q 作用於 M_p 的行的結果，右邊是 M_p 作用於 M_q 的列的結果。

我們不必寫電腦程式，請 DeepSeek 運算即可生成不等式。

這是我給 DeepSeek 的提詞(prompt)：

「Given a set of positive real numbers $a_1, a_2, \dots, a_n$ and a real number p the power mean M_p is defined as :

$$M_p(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{cases} (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^p)^{1/p}, & p \neq 0 \\ (\prod_{i=1}^n a_i)^{1/n}, & p = 0 \end{cases}$$

$A=\{a_{ij}\}_{m \times n}$ is a matrix

if $p>q$ ，then $M_q(\{M_p(\{a_{ij}\}_{j=1}^n)\}_{i=1}^m) \geq M_p(\{M_q(\{a_{ij}\}_{i=1}^m)\}_{j=1}^n)$ is called the JM inequality 。

Let $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ， $p=2$ ， $q=1$ ，produce a inequality explicitly by JM inequality 。」

$$M_1(M_2(A)) \geq M_2(M_1(A)) \text{ 則生成 } \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$$

這是閔可夫斯基不等式：

$$(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p)^{1/p} \leq (\sum_{k=1}^n |a_k|^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^n |b_k|^p)^{1/p} \text{ , } p \geq 1 \text{)}$$

$p=2$ 的情形，即為三角不等式。

§ 02

前幾期季刊中介紹中國女院是胡和生教授，用 Darboux 變換由一孤立子生成新的孤立子。

我試著用 DeepSeek，經由 $\ddot{B}acklund$ 變換把 Sine-Gordon 方程的解(此處取 trivial solution $\phi_0 = 0$)生成新的解：

以下是我給 DeepSeek 的提詞

「The auto-Backlund transformation for SG is :

$$\begin{cases} \partial_{\xi}(\phi_1 - \phi_0) = 2\lambda \sin\left(\frac{\phi_1 + \phi_0}{2}\right) \\ \partial_{\eta}(\phi_1 + \phi_0) = \frac{2}{\lambda} \sin\left(\frac{\phi_1 - \phi_0}{2}\right) \end{cases}, \text{ where } \lambda \text{ is a spectral parameter}$$

Let $\phi_0 = 0$, find ϕ_1

經過深思後它給出答案： $\phi_1 = 4\arctan(e^{\lambda s + \frac{\eta}{\lambda}})$

我們可以從過程中看到，令 $z = \lambda^2 s + \eta$ ，則 $\frac{d\phi_1}{dz} = \frac{2}{\lambda} \sin \frac{\phi_1}{2}$

如果有需要，可以要求它寫出細節。但是他每次得到的結果形式上或有不同。

例如，昨天它的解是： $\phi_1 = 4\arctan(e^{\gamma(x-vt)+\delta})$ ，其中 $\gamma = \cosh \theta, v = \tanh \theta$ ， δ is a phase shift。這是 AI 的特性。

我將 ϕ_1 代入，生成新的解 $\phi_2 = 4\arctan\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} \cdot \frac{e^{\lambda s + \frac{\eta}{\lambda}} - e^{\mu s + \frac{\eta}{\mu}}}{1 + e^{(\lambda + \mu)s + (\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu})\eta}}\right)$

其中 ϕ_1 是單孤立子解，描述一個扭結(kink) 或反扭結(antikink)。 ϕ_2 是雙孤立子解，描述兩個扭結的相互作用，如碰撞或束縛態(breather)。

§ 03

回到胡和生院士的 Darboux 變換。

Darboux 變換是構造可積系統新解的一種代數方法，對非線性的 sine-Gordon 方程仍然適用。

給 DeepSeek 的提詞為：

「考慮 sine-Gordon 方程的 Lax 對：

$$\partial_x \Psi = U \Psi, \partial_t \Psi = V \Psi, \text{ 其中 } \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \text{ 且 } U = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \partial_t \phi & \lambda \\ \lambda & -\partial_t \phi \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi} \\ e^{-i\phi} & 0 \end{pmatrix}$$

$\phi_0 = 0$ ，生成新解 ϕ_1 」

則通過 Darboux 變換生成新的解 $\phi_1 = 4\arctan(e^{\lambda x + y/\lambda})$

我們依然可以在生成的過程中看到 Darboux 矩陣。

若選取複參數 $\lambda = a + ib$ 則可生 breather 解。

當然重複使用 Darboux 變換可以生成多孤立子解。

KdV 方程也是可積系統，通過 Darboux 變換，取種子 $u_0 = 0$ ，生成的單孤立子解

為 $u_1 = -2k_1^2 \operatorname{sech}^2(k_1 x - 4k_1^3 t)$ 。

以下是生成新解的提詞：

「考慮 sine-Gordon 方程的 Lax 對：

$$\partial_x \Psi = U \Psi, \partial_t \Psi = V \Psi, \text{ 其中 } \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \text{ 且 } U = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \partial_t \phi & \lambda \\ \lambda & -\partial_t \phi \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi} \\ e^{-i\phi} & 0 \end{pmatrix}$$

$\phi_0 = 0$ ，生成新解 ϕ_1 」

以 u_1 為種子解，選取新的譜參數 λ_2 ，則生成雙孤立子解

$$u_2 = u_1 - 2\partial_x^2 \ln W(\psi_1(\lambda_1), \psi_2(\lambda_2)), \text{ 其中 } W \text{ 是 Wronskian 行列式。}$$

這個方法統一了可積系統的解構造框架，體現了可積性與非線性現象的深刻關聯。

§ 04

2006 年，當 AlphaGo 與韓國職業棋士李世乭的世紀之戰落幕，圍棋進入 AI 世代。

今年(2025 年)1 月 20 日，DeepSeek 的發布，人類探索未知之境進入一個新的局面，AI 將普及到各個層面，包括數學的研究探索。