

§1 楔子

“為什麼足球面上非有正五邊形不可？”

1990 年的一個早上，衛道中學。這時候 C60 (富勒稀) 正夯，化學老師老蔡如是說。我當天下午在一家寵物店買了一個很小很可愛的足球送給他，並提供他一個證明，以酬多年情誼。



§2 所謂拓撲學

把一個曲面拉長、扭曲，只要不把它戳破或兩點黏起來叫作連續變形。連續變形後不變的性質叫作拓撲性質。

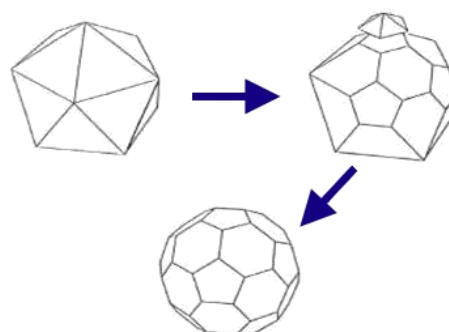
1735 年，尤拉研究哥尼斯堡七橋問題預告拓撲學之門即將展開。

假設一個多面體，點的個數= V ，邊的個數= E ，面的個數= F ，則 $V-E+F=2$ 就是一個拓撲性質，叫作尤拉示性數，在高等幾何是一個非常重要的性質。

球面的尤拉示性數=2，其證明早期列入高中課程中，並不困難。

§3 C60 的幾何結構

正多面體有五種：正四面體、正方體、正八面體、正十二面體、正二十面體。稱為柏拉圖多面體。



C60，一個有 20 個正 6 邊形，12 個正 5 邊形所構成的多面體，60 個碳就放在 60 個頂

點上，是一個截角正 20 面體，亦即將一個正 20 面體的每一個凸角切掉大小適當的一塊如右圖，這樣的結構有 32 個面，60 個頂點，以及 90 條邊，當然合乎 $60-90+32=2$

§4 從理論到應用

1985 年，美國萊斯 (Rice) 大學的克爾 (Robert F. Curl 1933~)、斯莫利 (Richard E. Smalley 1943-2005) 與英國瑟息斯 (Sussex) 大學的克魯圖 (Harold W. Kroto



1939-) 從純理論推測，有由 60 個碳原子所組成的空心球狀分子 C60 存在，三人因此共獲 1996 年諾貝爾化學獎。

1990 年德國的克拉舒末 (Wolfgang Krätschmer 1942~) 與美國的哈夫曼 (Donald Ray Huffman 1935~) 正式宣布他們製造出 C60。

1991 年飯島澄男 (Sumio Iijima 1939~；2002 年獲頒富蘭克林物理獎) 提出奈米碳管的概念後, C60 將成為 21 世紀關鍵材料。另一方面, 製作成的奈米機器人將提供一種新的醫療方法。

至於台灣, 到 1992 年才有台大化學系的牟中原、陸天堯等人投入。

2010 年西班牙卡納利天文研究所 (Instituto de Astrofísica de Canarias) 的天文學家與生化學家確認在大麥哲倫星系裡的 SMP48 有 C60。

§5 證明足球面上有 12 個正五邊形

假設有 m 個五邊形, n 個六邊形在球面上, 則

$$V = \frac{5m + 6n}{3} \quad (\text{每個頂點被 3 個邊所共有, 所以除以 3}),$$

$$E = \frac{5m + 6n}{2} \quad (\text{每個邊被 2 個面所共有, 所以除以 2}), \quad F = m + n$$

$$\text{代入尤拉示性數: } V - E + F = 2, \quad \frac{5m + 6n}{3} - \frac{5m + 6n}{2} + (m + n) = 2$$

兩邊同乘以 6, $2(5m + 6n) - 3(5m + 6n) + 6(m + n) = 12$, 得 $m = 12$

§6 習作

1. 證明球面的尤拉示性數=2
2. 很多病毒是正 20 面體 (icosahedron), 例如: 疱疹 (herpes) 病毒, 水痘 (chickenpox) 病毒, 人體疣 (human wart) 病毒, 犬類傳染性肝炎病毒, 腺病毒 (adenovirus) 等。用尤拉示性數證明: 正多面體恰有 5 種。
3. 達文西 (Leonardo da Vinci 1452~1519) 曾作一幅素描, 此素描是由邊長相等的正五邊形與正三邊形所組成的封閉多面體, 且正五邊形每一邊都與正三角形共邊, 且正三角形每一邊都與正五邊形共邊, 則此多面體有幾個正五邊形? 幾個正三角形? (建中通訊徵答 第九期 第 89903 題)

§7 習作解答

1. 證法很有意思，請看

<http://plus.maths.org/content/eulers-polyhedron-formula>

2. 正多面體的頂點 V 個, 稜 L 條, 面 F 個, 則 $L = \frac{V \times m}{2} = \frac{F \times n}{2}$, 代入尤拉公 $V-L+F=2$

得 $L(\frac{2}{m} + \frac{2}{n} - 1) = 2$, $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{L}$, 其中 $m \geq 3, n \geq 3$

但 m, n 不能同時大於 3, 否則 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ 不合, 所以 $m=3$ 或 $n=3$

若 $m=3$, 則 $\frac{1}{n} = \frac{1}{6} + \frac{1}{L}$, $n=3, 4, 5$; 解得 $L=6, 12, 30$

若 $n=3$, 則同理 $m=3, 4, 5$; 解得 $L=6, 12, 30$

(1) $(m, n) = (3, 3)$, $V=4, L=6, F=4$ 正四面體

(2) $(m, n) = (3, 4)$, $V=8, L=12, F=6$ 正六面體

(3) $(m, n) = (4, 3)$, $V=6, L=12, F=8$ 正八面體

(4) $(m, n) = (5, 3)$, $V=12, L=30, F=20$ 正 20 麵體

(5) $(m, n) = (3, 5)$, $V=20, L=30, F=12$ 正 12 面體

3. 假設 正五邊形 m 個, 正三角形 n 個, 則 $V = \frac{5m+3n}{4}$, $E = \frac{5m+3n}{2}$, $F=m+n$

代入尤拉示性數公式, 化簡得 $n-m=8$, 又 $3n=5m$, 所以 $m=12, n=20$

有 12 個正五邊形, 20 個正三角形。

§8 後記

C60 存在於天上(大麥哲倫星系)、地上(隕石), 由數學理論、實驗室到量產, 由古希臘時代到現代。時空事件的轉折充滿趣味且令人深思。

魏爾(Hermann Weyl 1885~1955)在其著作"Space-time-matter"中提議建立分子內部的數學。史都華(Ian N. Stewart 1945~)1990 年代寫的兩本書,"大自然的數學遊戲"與"生物世界的數學遊戲"中介紹生物數學的後續發展,說明數學是研究模式(pattern)的科學並提倡一種新的數學:形態數學(morphomatics),屬於微管的數學。也許由研究 C60 引起的分子拓撲學正是大家所尋找的新數學。

我們的頭髮至少有一個漩渦，也是一個拓撲性質（覆蓋圓盤的連續切向量場一定有奇異點。），清大林文雄教授是這方面的專家。至於為什麼我的漩渦變成地中海，那就不是數學，而是生物遺傳學的範疇了。

§9 參考資料

1. "準正多面體"有 13 種，富勒稀是其中一種。阿基米得在西元三世紀就描述過了。"Mathematics and the Buckyball" American Scientist vol8, Jan-Feb 1993 p.56
2. 多面體百科全書 <http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/vp.html>
3. 發現碳元素 <http://case.ntu.edu.tw/blog/?p=1439>
4. 1996 年諾貝爾化學獎
5. C60 計畫 <https://sites.google.com/a/c60.tw/my-first-project/>
6. 奈米碳網 <http://sa.ylib.com/MagCont.aspx?Unit=featurearticles&id=1188>
7. 天體中的富勒稀與石墨稀
<http://tamweb.tam.gov.tw/v3/TW/content.asp?mtype=c2&idx=327>
<http://tamweb.tam.gov.tw/v3/TW/content.asp?mtype=c2&idx=600>
8. 分子拓撲學的出現(徐文光)
<http://www.cuhk.edu.hk/ics/21c/media/articles/c036-199604020.pdf>
9. 二十一世紀雜誌 第 13 期 p.53 李榮基
http://www.cuhk.edu.hk/ics/21c/issue/articles/013_92064.pdf