§ 維拉尼 Cedric Villani(1973~)

日誌：一個定理的發生 波茲曼方程(藍道阻尼 Landau damping)

1. **Ricci Curvature and Volume Dynamics**:

   ○ In Riemannian geometry, Ricci curvature influences the growth of volume in small geodesic balls. Positive Ricci curvature causes slower volume growth than in Euclidean space, while negative curvature leads to faster expansion.

在黎曼幾何中，里奇曲率影響測度如何在空間中擴散。例如，在具有正里奇曲率的流形上，熱核（heat kernel）滿足某些良好的擴散性質。這樣的概念可以推廣到一般度量測度空間（metric measure space），而最優傳輸提供了一種自然的方法來定義「廣義的曲率條件」。

2. **Optimal Transport and Wasserstein Geometry**:
   - Optimal transport concerns efficiently moving mass between distributions, often using the Wasserstein distance. The Wasserstein space of probability measures has a rich geometric structure where geodesics correspond to optimal transport plans.
3. **Displacement Convexity**:

- A pivotal concept linking the two is **displacement convexity** of entropy functionals. A functional (e.g., Boltzmann entropy) is displacement convex if it is convex along Wasserstein geodesics.
- **Theorem (Lott-Sturm-Villani)**: A smooth Riemannian manifold has Ricci curvature bounded below by K if and only if the entropy functional is displacement K-convex. This means for any Wasserstein geodesic $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$, the entropy satisfies:

$$S(\mu_t) \leq (1-t)S(\mu_0) + tS(\mu_1) - \frac{K}{2}t(1-t)W_2^2(\mu_0,\mu_1),$$

where W_2 is the Wasserstein distance.

4. **Synthetic Curvature Bounds**:
   - This connection allows defining **synthetic Ricci curvature bounds** (via the curvature-dimension condition $\mathrm{CD}(K,N)$) for non-smooth metric measure spaces. Here, K generalizes Ricci curvature, and N the dimension. A space satisfies $\mathrm{CD}(K,N)$ if its entropy exhibits K-convexity under optimal transport, mirroring the behavior of manifolds with $\mathrm{Ric}\geq K$ and $\dim\leq N$.

2. CD(k,N) 條件：里奇曲率的合成曲率條件

由 **Lott–Villani** 和 **Sturm** 獨立發展出的 **曲率維度條件**（Curvature-Dimension condition, CD(k,N)）利用最優傳輸來刻畫測度空間的「廣義里奇曲率下界」：

- 這種條件描述了一個測度空間是否像具有里奇曲率 ≥ k 的流形那樣行為。
- 它通過 **最優輸運地圖（optimal transport map）** 來定義測度的變化方式，並確保測度在傳輸過程中不會「擴散得太快」或「壓縮得太多」。
- 這種條件推廣了經典里奇曲率的概念，使其適用於更廣泛的度量測度空間，例如某些非光滑空間。

3. Entropic Ricci curvature（熵型里奇曲率）

- **Otto–Villani** 透過信息幾何的方法，研究了熵與最優傳輸之間的關係，並發現費雪信息與里奇曲率之間的關聯。
- 在測度空間上，里奇曲率的下界可以透過 **相對熵在最優傳輸下的凸性** 來刻畫，這與熱方程的遞減性有關。

4. 里奇曲率與 Wasserstein 距離的連結

- **Wasserstein 距離** 是最優傳輸中的重要概念，它度量兩個機率分佈之間的「最小變形成本」。
- 在具有非負里奇曲率的流形上，Wasserstein 距離與熱流的行為密切相關。例如，里奇曲率的下界可以控制隨機過程的擴散速度。

5. **Geometric Implications**:
    - Positive Ricci curvature restricts the "spreading" of mass during optimal transport, reflecting a form of metric rigidity. This is captured analytically by gradient flow properties of the entropy and PDEs like the heat equation, where Ricci bounds control solutions via the Bochner formula.

Significance:

- **Bridging Disciplines**: This framework unifies differential geometry with analysis, enabling the study of curvature in singular spaces (e.g., graphs, fractals) via optimal transport.
- **Applications**: It has impacted geometric analysis, probability (e.g., functional inequalities), and machine learning (e.g., understanding data manifolds).

In essence, Ricci curvature governs the convexity of entropy along optimal transport paths, providing a robust, geometric characterization of curvature that extends beyond smooth settings.

5. 應用

- 在 **機器學習與數據分析** 中，最優傳輸與測度幾何結合，提供了一種在非歐幾里得空間上進行數據比較的方法。
- 在 **物理與流體力學** 方面，最優傳輸可以描述具有曲率約束的粒子流動行為。
- 在 **熱方程與幾何不等式** 研究中，透過最優傳輸來理解里奇曲率的作用已經成為一個重要的趨勢。

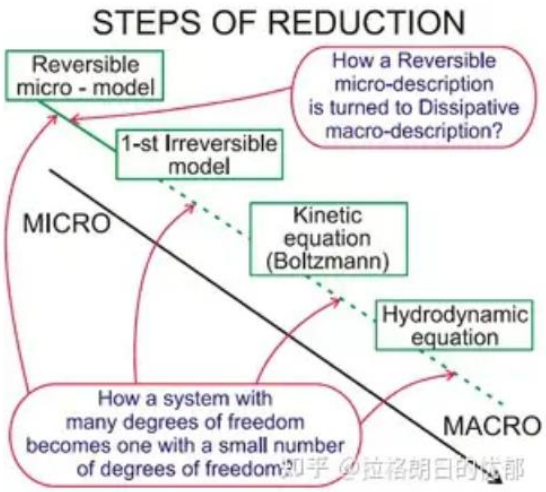
結論

里奇曲率與最優傳輸之間的關聯是幾何分析中的一個核心主題。透過最優傳輸，可以將里奇曲率的概念推廣到一般度量測度空間，使其適用於非光滑幾何、機率理論和信息幾何。這種聯繫已經被廣泛應用於幾何流、熱方程、機器學習和物理科學等領域。

1. Optimal transport，old and new
2. Birth of Theorem https://www.youtube.com/watch?v=nD6UvYrNoXI
3. 有朋自遠方來 [ResearchGate] [Cedric Villani]

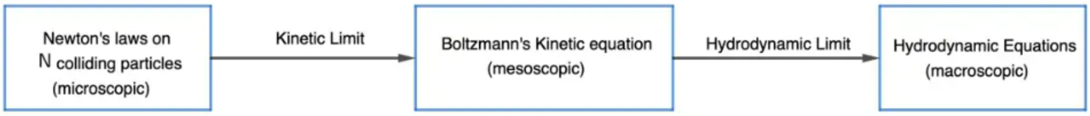
Hilbert 第六問題 公理化物理學

Derivation of fluid equations via Boltzmann kinetic theory



這個問題其實不只是一個數學問題，也涉及到我們對這個世界的基本理解，即世界作為一個整體，不同層次的規律是如何協調在一起的，如果能建立微觀粒子系統與宏觀連續介質之間的數學橋樑，那麼這種協調就可以建立在一個比較堅實的基礎之上。這裡其實還牽涉到一個老生常談的問題，可逆的牛頓定律是如何變成不可逆的玻爾茲曼方程，時間可逆與不可逆如何轉換。當然從物理量子場論的角度，我們對這種協調的理解主要是重整化群和有效場論。從流體力學的角度這個問題也很重要，這可以為湍流等複雜現象提供更底層的理論解釋基礎。

依照本文作者的敘述，他們成功通過硬球碰撞粒子系統的彈性碰撞，經由玻爾茲曼動理學方程成功推導出流體力學基本方程，最終實現希爾伯特提出的「從牛頓定律到流體方程」的數學路徑。



鄧煜(北大) 馬驍 Zaher Hani