

§ 數學力學

故事要從塔蘭多的阿爾庫塔斯([Archytas of Tarentum 429-347BC](#))說起。



西元前 416 年冬天，雅典投票決定是否[遠征西西里](#)，終於於第二年遠征。

雅典、斯巴達、敘拉古、柯林斯四方爭鬥，最終雅典失敗，走向覆亡。

我的小說[傳奇]第四卷 遠征，場地時間設定在 410BC，介於雅典遠征與敗亡的中點。

此時阿爾庫塔斯 19 歲，正致力於數學力學。

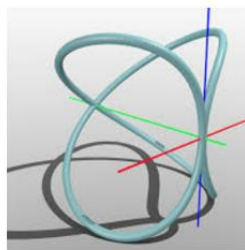
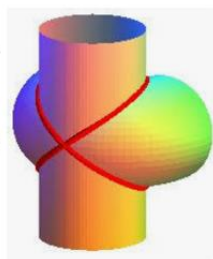
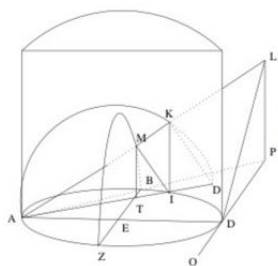
根據記載，當柏拉圖被敘拉古的暴君狄奧尼修斯(Dionysius 二世)下獄時，阿爾庫塔斯寫了信給狄奧尼修斯救了柏拉圖，因此是柏拉圖理想國的哲學家國王。(塔蘭多與敘拉古都是位於義大利，阿爾庫塔斯連續七年被選為將軍，政治和軍事上都媲美雅典的伯里克利，跟暴君應該是朋友。)

阿爾庫塔斯又因為 [Archytas curve](#) 被柏拉圖責難，說是用力學玷污了幾何的純潔性。

整體看起來，這時間序似乎有點錯亂。主要是因為阿爾庫塔斯的出生 435/410 BC 死亡 360/350BC 時間需要考證。

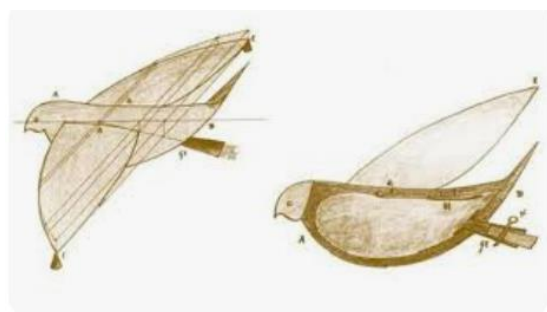
問題是柏拉圖何時，因何事而去了敘拉古？

又 [Archytas 曲線](#)到底是什麼，值得柏拉圖大驚小怪？



阿爾庫塔斯曲線是圓環面與一圓柱面的交線如左圖。

用以解決倍立方問題 (doubling the cube problem)，是基於力學概念。



寫成參數式是這樣：

$$x = \frac{\cos^4 t}{(1 + \sin^2 t)^2} \quad y = \frac{\cos t \sin 2t}{(1 + \sin^2 t)^2}$$

$$z = \frac{\sin 2t}{\sqrt{2}(1 + \sin^2 t)}$$

問題是與力學何干？

不知飛鴿(Steam powered pigeon)是否可看出端倪？

下午雨中行 與小李通話，提到程之寧女士的[以數學理解世界]，小李說他想看一下。

回程想到敘利亞曾經是一個小而美的國家，國破山河不再，現在美國出手了，沙拉摘掉恐怖份子的帽子，從此被招安成功，成為美國在中東的代理人。

這瘋狂的世界還真難理解。

回到家，把 Brook Taylor 1714 年導出了波動方程，重做了一遍。

心情好了一點。

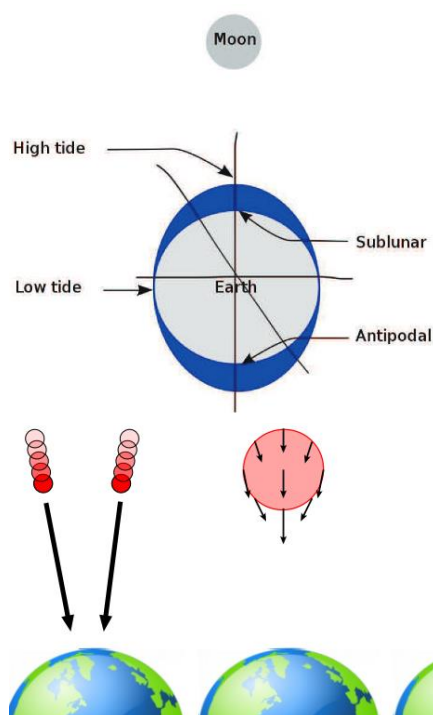


Figure 5.1: The effect of tidal forces.

接著看[潮汐現象及沈括定律] by 莫宗堅 黃蘋說的是地球上的潮汐現象，文末提到 浩瀚宇宙 雙星系由互相旋轉而近到互相接觸，它們或許會捲起滔天巨浪，應為奇觀。這是甚麼意思？

一直都知道廣義相論中重力引起潮汐現象，[Jacobi field](#) 與之有關，可一直都沒搞清楚，也許利用這個機會可以看得明白些。

一個很明顯的潮汐力就是左圖的例子。兩自由落體(所以軌跡是測地線)朝地心落下，它們會慢慢接近，這是所謂潮汐力的效應。

把地球換成月球，自由落下的物體換成海水，就形成上面海潮圖。

一個人如果掉進黑洞也會經歷潮汐力，通常就完了。[[SpaceMath](#) at NASA] 所以時空旅行是要通過[蟲洞](#)。

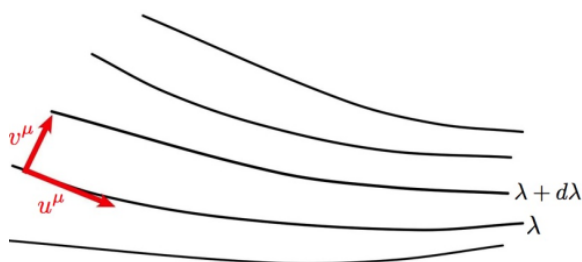


辛格(John Lighton Synge 1897~1995)是最早研究黑洞內部的物理學家之一，稱 Jacobi fields 方程是測地線偏離(geodesic deviation)方程，在引力波的研究中有應用。

[[引力波百年漫談](#)] 盧昌海

黃武雄老師的[大域微分幾何]最後一章 p.666 是 cmc 曲面上的 Jacobi 場與 Morse Index 定理。

大概是在探討 cmc 曲面上 Jacobi 場的分佈吧！我真沒看懂。



[常均曲率曲面](#)上的 Jacobi 場有何重要性質？

當然[極小曲面](#)是 CMC 的特例。

5.2: Bunch of geodesics classified by the value of λ .

Jacobi 場方程長這樣 $\nabla^2 J + R(J(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t) = 0$

Ricci flow 長這樣 $\frac{\partial g}{\partial t} = -2 \text{Ric}(g)$

波動方程長這樣 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

因為最近在看 Ricci flow，我就問了一個有點無厘頭的問題：

Jacobi field equation 是一個微分方程，Ricci flow 是一個 PDE，那麼，兩者有關連嗎？

[[還真有咧](#)]只是沒看懂！

參考資料

1. 西西里遠征 415-413/9/10 BC
2. 常均曲率曲面上的 [Jacobi 場](#)可以在黃武雄老師的個人網頁上找到。