今天主題是散度(divergence)

古典向量場 梯度、散度、旋度合併為 Stokes 定理$\int_M d\omega=\int_{\partial M}\omega$。

在 R^3 中，散度就是通量對體積的變化率。寫成$\int_V \nabla\bullet F dV=\int_{\partial V} F\bullet n dS$

1. 向量場 E，$divE=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iint_S \mathrm{E}\cdot\vec{n}dS=\frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial z}$

2. Differential form，Ω是 R^3 中的有界區域，$\omega=Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy$

則$d\omega=(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dx\wedge dy\wedge dz$稱為 divergence。

其中$dx\wedge dy\wedge dz$ 是 volume form。可見 divergence 就是面積膨脹率。

3. 黎曼流形上的散度定理 $\int_{\partial\Omega}<W,n>dS=\int_{\Omega}(divW)dM$，n 是$\partial\Omega$上朝外的單位法向量。 [大域微分幾何]p.335 這表明散度定理是 Stokes 定理之特例。

4.

$$\mathrm{Hess}(f)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{bmatrix}$$

$\Delta f=tr(Hess(f))=div(gradf)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ Laplacian of f

Divergence Theorem

Let M be an oriented Riemannian manifold with boundary ∂M, and let X be a smooth vector field on M with compact support. Then:

$$\int_M \operatorname{div} X\,dV=\int_{\partial M}\langle X,N\rangle\,dS,$$

The flux of X through ∂M is the integral of $<X,N>$ over ∂M。

Where divX is the divergence of X，defined as the trace of the covariant derivative of X，or equivalently $L_X dV=(divX)dV$，$divXdV=d(\iota_X dV)$，$divX=tr(\nabla X)$

N is the outward unit normal vector field along ∂M 。

Applications:

- Conservation laws (e.g., mass, energy in physics).
- Green's identities and analysis of the Laplacian.
- Geometric analysis and PDEs on manifolds.

Covariant derivative of a 1-form ω

$\nabla_X \omega = \sum_i (X\omega_i - \sum_{j,k} \Gamma^k_{ji} X^j \omega_k) dx^i$ ，寫成 $\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \omega_\lambda$

Cartan magic formula $L_X \omega = \iota_X d\omega + d(\iota_X \omega)$

所謂的 interior product 如何運算：

$$\iota_X (dx_1 \wedge dx_2 \ldots \wedge dx_n) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \mathrm{X}^r dx_1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx_r} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

這裡 $\hat{dx_r}$ 表示把 dx_r 省略。

舉一例說明如何運算

在黎曼幾何中，向量場 X 的散度 (divergence) 是透過李微分與度量相容的連絡 (Levi-Civita connection) 來定義的。

具體來說，散度定義為： $div(X) = \nabla_i X^i$

例如 W=(x+2y,4x+3y)

$$divW = \nabla_i W^i = \frac{\partial}{\partial x}(x+2y) + \frac{\partial}{\partial y}(4x+3y) = 4$$

另一個常用的表示法為 $div(X) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{|g|} X^i)$ ，其中 $g = \det(g_{ij})$

在 S^2 上計算：

$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$ ， $g_{ij} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$ ， $|g| = r^4 \sin^2\theta$

考慮 $X = X^\theta(\theta,\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} + X^\phi(\theta,\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}$

$div(X) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sqrt{|g|}X^\theta) + \frac{\partial}{\partial\phi}(\sqrt{|g|}X^\phi)]$ ， $\sqrt{|g|} = r^2 \sin\theta$

代入計算，化簡得 $div(X) = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta X^{\theta}) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial X^{\phi}}{\partial\phi}$

例如取 $X^{\theta} = \sin\theta, X^{\phi} = \cos\phi$ 則 $div(X) = 2\cos\theta - \frac{\sin\phi}{\sin\theta}$

X 是在 S^2 上任意 Killing field，則 div(X)=0

2-sphere 上的 Killing 向量場可以看作是球面的對稱生成元（例如旋轉對稱）。由於這些對稱操作不會「壓縮」或「擴張」面積元素，因此對應的向量場是無散度的，這與散度在幾何上描述體積（或面積）變化率的性質一致。

Killing vector field 滿足 $\nabla_{\mu}X^{\nu} + \nabla_{\nu}X^{\mu} = 0$ ，$div(X) = \nabla_i X^i$

$\mu = \nu$ 代入 Killing equation，$\nabla_{\mu}X^{\mu} = 0$ 所以 div(X)=0

若在 S^2 上取一 Jacobi field J(t)

沿著測地線 γ 的 Jacobi field J(t)滿足 $\frac{D^2 J}{dt^2} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0$

取單位球為例其曲率為 K=1，Jacobi equation 變成 $\frac{D^2 J}{dt^2} + J = 0$

$J(t) = A\sin t + B\cos t$ 其中 A,B 是恆定向量場。

1. **Jacobi 場與測地線偏差**：
   Jacobi 場描述測地線族之間的距離如何變化。如果這些測地線朝向匯聚或發散，Jacobi 場的散度就可以視為測地線「擴張」或「收縮」的度量。
2. **常曲率球面上的結果**：
   在 S^2 這種常曲率流形上，沿測地線的 Jacobi 場與球面幾何的對稱性緊密相關。具體而言，對於測地線偏差：

$$\mathrm{div}(J) = \frac{d}{dt}(\log\det(d\exp_{\gamma(0)}))$$

   對球面而言，這反映了測地線球（geodesic sphere）的面積元素如何隨半徑變化。

$S^2 : ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ 若取 $J(t) = f(t)\frac{\partial}{\partial\theta}$ 則其散度為

$$div(J) = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta f(t))$$

若 f(t)為 cost 或 sint 類型的解，則可以清楚地看到散度的具體形是會隨 θ 而變化。

一般而言，Jacobi field 在 S^2 上具有非零散度，這反映了測地線在球面上匯聚或發散的本質。