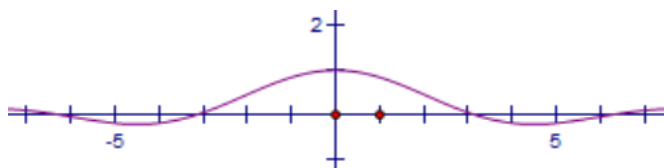


§

$y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 稱為 sinc 函數，是一個偶函數，圖形如下：



若令 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 則解析延拓為一光滑函數。

(歸一化(normalization)後寫成 $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ 。)

1. 由圖形可知 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

2. (1) 由夾擠原理 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (2) 比較審斂法 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

3. 當 $|x| \rightarrow \infty$ ， $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \sim \left| \frac{1}{x} \right|$ 表示函數振幅以 $\frac{1}{|x|}$ 速度衰減，且隨 $\sin x$ 振盪。

此特性在數值積分和吉布斯現象 (Gibbs phenomenon) 分析中至關重要。

4. 由 $y = \sin(x)$ 的泰勒展開式可以推導出 $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Basel problem)

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right) \quad (\text{Euler 1748})$$

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

5. 正弦積分(Sine integral) $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

(1) $\text{Si}(\infty) = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ 是一個 Dirichlet 積分

(2) $\text{Si}(-x) = -\text{Si}(x)$ (奇函數)

$$6. \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \pi$$

7. 傅立葉轉換 $F\left[\frac{\sin ax}{\pi x}\right](\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| < a \\ \frac{1}{2}, & |\xi| = a \\ 0, & |\xi| > a \end{cases}$ 。就是說， $\frac{\sin ax}{\pi x}$ 是矩形函數(rect

function)，因此它是理想低通濾波器的脈衝響應。

8. 多維 sinc 函數 $\text{sinc}(x, y, z) = \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ，此類函數描述球對稱系統的

響應（如天線輻射模式）。

結論：

Sinc 函數在數學分析、訊號處理、物理建模及數值方法中均有深刻應用。

探討 Fourier 級數的收斂性時自然而然出現，這個函數是典型的 Riemann 可積（瑕積分）卻不是 Lebesgue 可積（瑕積分）。

參考資料

1. [尤拉的絕活](#)
2. [尤拉級數](#)

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) \cdots (1) \quad \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \cdots (2) \quad \zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \cdots (3)$$

三者似乎有某種關係：

(1) 推導(2)，(3) 提供了 zeta 函數的另一種表達方式，並與第二個式子直接關聯。