

§ 如何解愛因斯坦方程式(EFE)

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad \text{其中 } G \text{ 是萬有引力常數，} c \text{ 是光速}$$

1. $G_{\mu\nu}$ 是愛因斯坦張量，描述時空的曲率
2. Λ 是宇宙常數，與宇宙的加速膨脹有關。 $g_{\mu\nu}$ 是度規張量
3. $T_{\mu\nu}$ 是應力-能量張量，代表物質與能量的分布

解法步驟：

1. 選擇度規
 - (1) Schwarzschild metric：靜態球對稱時空
 - (2) Kerr metric：旋轉黑洞
 - (3) FLRW metric：描述宇宙膨脹
2. 計算 Christoffel symbols $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right)$
3. 計算黎曼曲率張量 $R_{ijk}^l = \partial_j \Gamma_{ik}^l - \partial_k \Gamma_{ij}^l + \Gamma_{\lambda j}^l \Gamma_{ik}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda k}^l \Gamma_{ij}^{\lambda}$
4. 計算里奇張量 $R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}$ 表示時空局部彎曲程度
5. 計算愛因斯坦張量 $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ 其中 $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ 是里奇純量(Ricci scalar)
6. 設定應力-能量張量(Stress-Energy tensor)

應力-能量張量 $T_{\mu\nu}$ 表示物質與能量的分布，具體形式取決於物理系統，例如：

- 真空 (Vacuum) : $T_{\mu\nu} = 0$ ，適用於黑洞等問題。
- 理想流體：用於宇宙學，形如

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_{\mu}U_{\nu} + pg_{\mu\nu}$$

其中 ρ 是能量密度， p 是壓力， U^{μ} 是四維速度。

7. 求解愛因斯坦方程式 $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$

這是一組 10 條聯立偏微分方程，根據具體情況有不同的解法：

- (1) 對稱性簡化
- (2) 解析解(exact solution)
- (3) 數值解(numerical solution)

8. 例子 求 Schwarzschild 解

假設球對稱、真空(即 $T_{\mu\nu} = 0$)，可選擇 Schwarzschild metric：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

代入 EFE，計算 Christoffel symbols、Ricci tensor、Einstein tensor，最後求解得到 $g_{\mu\nu}$ 。

這就是靜態球對稱真空解，也就是黑洞外部的解。

Conclusion：

Solving the Einstein field equations is a challenging task that requires a deep understanding of general relativity，differential geometry，and tensor calculus。

The process involves making appropriate assumptions，setting up and solving differential equations，and interpreting the resulting solutions in a physical context。