女中 110 學年第二學期第一次段考數學試題

一. 單選

1. 下列有六組數值資料 A、B、C、D、E、F，每組各有 6 筆，設其標準差依序為 σ_A，σ_B，σ_C，σ_D，σ_E，σ_F，則以下關於六組數值標準差的敘述，何者是正確的？

A：2，3，4，5，6，7

B：8，7，6，5，4，3

C：2+8，3+7，4+6，5+5，6+4，7+3

D：$\frac{3}{11}$，$\frac{4}{11}$，$\frac{5}{11}$，$\frac{6}{11}$，$\frac{7}{11}$，$\frac{8}{11}$

E：$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$

F：-4，-6，-8，-10，-12，-14

(A) $\sigma_B > \sigma_A$　(B) $\sigma_C = \sigma_A + \sigma_B$　(C) $\sigma_D = \frac{\sigma_A}{11}$　(D) $\sigma_E = \sqrt{\sigma_A}$　(E) $\sigma_F < \sigma_A$

性質：若 Y=aX+b，則 $\sigma_Y = |a|\sigma_X$

B=A+1，所以 $\sigma_B = \sigma_A$；$D = \frac{1}{11}B$，所以 $\sigma_D = \frac{1}{11}\sigma_B = \frac{1}{11}\sigma_A$

$F = -(A+2)$，所以 $\sigma_F = \sigma_A$

沒有(B)與(D)這樣子的性質。

答：(C)

2. 有一等差數列 $\langle a_n \rangle$，其首項 $a_1 = 1.2$，公差為 0.2，若第 k 項 $a_k = 4.8$，試求下列級數和：
$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_k^2 = (1.2)^2 + (1.4)^2 + (1.6)^2 + \cdots + (4.8)^2$ 之值為？

(A) 193.8　(B) 196　(C) 375.18　(D) 577　(E) 969

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$a_n = 1.2 + (n-1)\times 0.2 = 1 + 0.2n$$

可以算出 k=19

原式=

$$\sum_{n=1}^{19}(1+0.2n)^2 = \sum_{n=1}^{19}(1+0.4n+0.04n^2) = 19 + 0.4\times\frac{19\times 20}{2} + 0.04\times\frac{19\times 20\times 39}{6} = 193.8$$

答：(A)

3. 設有一數列$\langle a_n \rangle$：0 , 1 , 1 , 2 , 3 , 2 , 4 , 5 , 6 , 3 , 7 , 8 , 9 , 10 , 4 , 11 , 12 , 13 , 14 , 15 ,⋯
其中$a_1 = 0$，$a_2 = 1$，$a_3 = 1$，$a_4 = 2$，⋯，依此類推。觀察此數列的規律，發現可將其分組如下：
(0 , 1), (1 , 2 , 3) , (2 , 4 , 5 , 6), (3 , 7 , 8 , 9 , 10) , (4 , 11 , 12 , 13 , 14 , 15) ,⋯
若依此規律進行，則第 111 項a_{111}的值為何？
(A) 96 (B) 97 (C) 98 (D) 111 (E) 112

假設a_{111}是第 n 群第 k 項

$2+3+4+...+(n+1)\le 111$，n 最大值=14

2+3+4+...+14=104，所以a_{111}是第 14 群第 7 項

假設第 n 群第二項=b_n，則$b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 4, b_4 = 7, b_5 = 11, ...$

$b_n = b_{n-1} + n - 1, n \ge 2$，算出$b_n = \dfrac{n^2 - n + 2}{2}$

第 14 群首項=13,第二項=92，第 7 項=97

答：(B)

二. 多選

1. 設數列$\langle a_n \rangle$滿足$a_1 = 6$，$n \cdot a_{n+1} = (n+3)a_n$，$n$ 為正整數，則下列選項何者正確？
(A) $a_5 = 210$ (B) $\langle a_n \rangle$為等比數列 (C) $a_n = \dfrac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$
(D) 可找到一正整數 n 使$a_n = 1716$ (E) $a_1 + \dfrac{a_2}{2} + \dfrac{a_3}{3} + \cdots + \dfrac{a_{15}}{15} = 1630$

依照題目(E)選項的提示，$\dfrac{a_n}{n}$有規律性。

由遞迴式$a_{n+1} = \dfrac{n+3}{n} a_n$，得$a_1 = 6, \dfrac{a_2}{2} = 12, \dfrac{a_3}{3} = 20, \dfrac{a_4}{4} = 30$，...

$\dfrac{a_n}{n} = 6 + \{6 + 8 + ... + (2n+2)\} = n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$

$a_n = n(n+1)(n+2)$

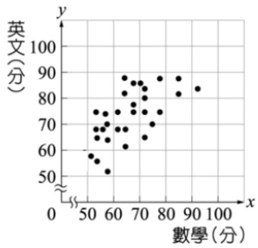
或者說$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+3}{n} = \dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{n(n+2)(n+1)} = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n(n+1)(n+2)}$可以”猜到”

$a_n = n(n+1)(n+2)$，但是 這是事後聰明。

$1716 = 11 \times 12 \times 13$

答：ADE

2. 右圖為高一某班 30 人第一次段考數學成績 x (分)與英文成績 y (分)之散布圖，每個點代表一位學生的成績，設數學成績 x 與英文成績 y 之相關係數為 r，請根據右圖，選出正確的選項。
(A) $0<r<1$　(B) 數學成績的中位數小於英文成績的中位數
(C) 英文成績的標準差大於 25　(D) 兩科總分大於 160 分的學生有 9 位
(E) 若將兩科成績分別標準化後得 x'、y'，且 x'、y'的相關係數為 r'，則 $r'=r$



平移伸縮

U=aX+b，V=cY+d 則 r(U,V)=sign(ac)×r(X,Y)

標準化 $U=\frac{X-\mu_X}{\sigma_X},V=\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$，因為 σ_X,σ_Y 皆>0，所以 $r'=r$

(B) 用數的，數學 由左到右，英文 由下到上

(C) 假設極端情形，有 15 個人考 90 分，15 個人考 40 分，此時 $\mu=65$

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{30}\sum_i (x_i-65)^2}=$$ 顯然不合

答：ABE

3. 設有 10 組二維數據 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，⋯，(x_{10},y_{10})，其算術平均數分別為 $\mu_x=7$，$\mu_y=4$，相關係數為 0.2，且 y 對 x 的最適直線(迴歸直線) L 過 $(1,1)$，則下列敘述何者正確？
(A) 此最適直線 L 過 $(3,2)$
(B) y 對 x 的最適直線斜率為 2
(C) x 的標準差小於 y 的標準差
(D) 若 $u=-3x+7$，$v=y-5$，則 v 對 u 的最適直線斜率為 $\frac{1}{6}$
(E) 若將 x、y 各數據 (x_i,y_i) 分別標準化後得 (x_i',y_i')，$i=1,2,\cdots,10$，則 y' 對 x' 的最適直線斜率為 1

最適直線方程式為 $y-\mu_Y=m(x-\mu_X)$，其中 $m=r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$

y-4=m(x-7)，(1,1)代入，得 $m=\frac{1}{2}$，迴歸直線 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$\frac{1}{5}\times\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}=\frac{1}{2}$，所以 $\sigma_Y>\sigma_X$

(D) 此時 $r'=-r=-0.2$，$\sigma_V=\sigma_Y,\sigma_U=3\sigma_X$

$m'=r'\times\frac{\sigma_V}{\sigma_U}=-\frac{1}{6}$

(E) 標準化 $U=\frac{X-\mu_X}{\sigma_X},V=\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$，$r'=r,\sigma_V=1,\sigma_U=1$

此時迴歸直線的斜率 $=r=0.2$

答：AC

三. 填充題

1. 設實數 a, b, c 成等比數列，且滿足 $ab+bc+ca=175$，$abc=343$，則 $a+b+c=$__________。

令 $b=ar, c=ar^2$ 則 $a^2r+a^2r^3+a^2r^2=a^2r(1+r+r^2)=175$，且 $(ar)^3=343, ar=7$

所以 $a+b+c=a(1+r+r^2)=\dfrac{175}{7}=25$

答：25

2. 一組資料共有五筆數據，經標準化後為 1.1、-0.8、-1.5、0.3、a。若已知原來五個數的算術平均數為 75，標準差為 10，則原來五個數的中位數為__________。

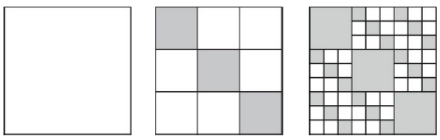
因為標準化後 $\mu_Z=0$，所以 a=0.9

依大小順序排列-1.5，-0.8，0.3，0.9，1.1 所以中位數是 0.3

$Z=\dfrac{X-\mu_X}{\sigma_X}$，$0.3=\dfrac{x-75}{10}$ 所以 x=78

答：78

3. 有一白色正方形如〈圖 1〉，將其以九宮格形平分成 9 塊，並把左上右下對角線上的三塊塗成灰色，如〈圖 2〉；接著將剩下的 6 個白色小正方形，分別再以九宮格形分成 9 個相同的小小正方形，然後把左上右下對角線上的三塊塗成灰色，如〈圖 3〉。重複此步驟，設 a_n 為〈圖 n〉中的灰色正方形的總數($a_1=0$，$a_2=3$，…)，n 為正整數，則〈圖 n〉中的灰色正方形的總數 $a_n=$__________。(以 n 表示 a_n 之一般項)



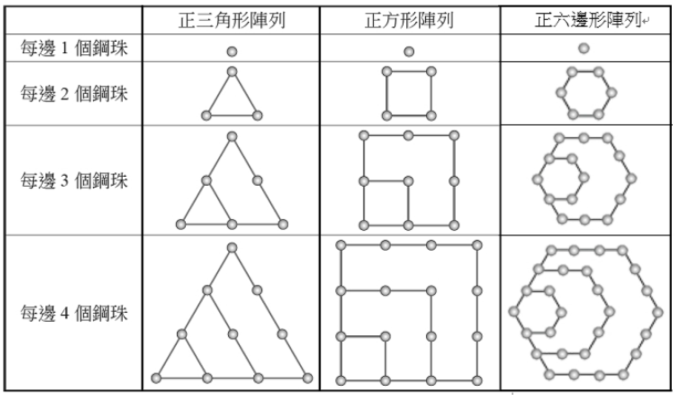
〈圖 1〉 〈圖 2〉 〈圖 3〉

找到的遞迴關係是 $a_{n+1}=6a_n+3$，設 $a_{n+1}+c=6(a_n+c)$ 則 $c=\dfrac{3}{5}$

$a_n+\dfrac{3}{5}=(0+\dfrac{3}{5})\times 6^{n-1}$，所以 $a_n=\dfrac{3}{5}(6^{n-1}-1)$

答：$\dfrac{3}{5}(6^{n-1}-1)$

4. 用大小一樣的鋼珠可以排成正三角形、正方形與正六邊形陣列，其排列的規律如下圖所示



已知阿蘭擁有的鋼珠恰好可以排成每邊 10 個鋼珠的正三角形陣列與正六邊形陣列各一個；若現在想將這些鋼珠全部拿去排成一個每邊 n 個鋼珠的正方形陣列，則 n 的最大值為__________。

正三角形陣列 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，正方形陣列 $b_n=n^2$，正六邊形陣列 c_n

$c_1=1, c_2=6, c_n=c_{n-1}+4(n-1)+1, n\ge 2$，可以算出 $c_n=2n^2-n$

$a_{10}+c_{10}=45+190=235=15^2+10$

答：15

5. 某高中一年級有甲、乙、丙三班，人數分別為甲班 40 人，乙班 30 人，丙班 30 人；已知第一次期中考三個班數學成績的算術平均數分別為甲班 75 分，乙班 78 分，丙班 72 分；且標準差甲班 10 分，乙班 6 分，丙班 k 分。現將三個班的成績合併後，求得一年級 100 位同學數學成績的標準差為 $\sqrt{80.5}$，則實數 k ＝__________。

	X	Y	Z	T(合併後)
人數	40	30	30	100
μ	75	78	72	75(先算出來)
σ	10	6	k	$\sqrt{80.5}$

$$10=\sigma_X=\sqrt{\frac{1}{40}\sum_i x_i^2-75^2}\Rightarrow\sum_i x_i^2=229000$$

$$6=\sigma_Y=\sqrt{\frac{1}{30}\sum_i y_i^2-78^2}\Rightarrow\sum_i y_i^2=183600$$

$$\sqrt{80.5}=\sqrt{\frac{1}{100}\sum_i t_i^2-75^2}\Rightarrow\sum_i z_i^2=570550-(229000+183600)=157950$$

$$k=\sigma_T=\sqrt{\frac{1}{30}\sum_i z_i^2-72^2}=\sqrt{5265-5184}=9$$ 答：9

6. 菲菲打算在明年 1 月初向銀行貸款 500 萬買房子，該銀行採用「本息平均攤還法」還款，其計算方式為：每月複利計息一次，將貸款期間內全部貸款之本金與利息平均分攤於每一期中償付，使每期繳納相同的金額；且銀行願意貸款給民眾的房貸金額(本金)是以每月的房貸支出(即每月所還之本利和)不超過月收入的 $\frac{1}{3}$ 為原則。若該銀行貸款的年利率為 2.4%，每月複利計息一次，每月月底還一次本息， 25 年後還清，則菲菲的月收入至少要 ______萬元才可貸款。(答案請取整數至萬元。已知：$1.002^{25}\approx 1.05$，$1.002^{300}\approx 1.82$；月利率=年利率÷12)

月利率$=2.4\%\div 12=0.2\%$

$$x+(1+0.2\%)x+(1+0.2\%)^2x+\dots+(1+0.2\%)^{299}x=500\times(1+0.2\%)^{300}$$

$$\frac{[(1.002)^{300}-1]x}{0.002}=500\times 1.002^{300}$$

$x=\frac{182}{82}\approx 2.2195$ 是收入的 $\frac{1}{3}$，所以收入 3x≈6.6 萬元

答：7

7. 下表為某地區 2021 年 3 月到 7 月的月均溫 x(℃) 與每戶的月平均電費 y(元)，已知表中 a、b 皆為正整數，且 y 對 x 的最適直線(迴歸直線)方程式為 $y=\frac{100}{3}x-200$，則數對(a，b)=__________。

	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月
x(℃)	24	26	30	32	38
y(元)	600	700	a	800	b

算出 $\mu_X=30$，因為迴歸直線通過 (μ_X,μ_Y)，可算出 $\mu_Y=800$，所以 a+b=1900

把資料平移到 (μ_X,μ_Y)，U=X-30，$V=\frac{Y-800}{100}$ 以方便計算

U	-6	-4	0	2	8
V	-2	-1	c	0	d

則 c+d=3，r(U,V)=r(X,Y)，$m'=r'\times\frac{\sigma_V}{\sigma_U}=r\frac{\frac{\sigma_Y}{100}}{\sigma_X}=m\times\frac{1}{100}=\frac{1}{3}$

$\frac{12+4+0+0+8d}{36+16+0+4+64}=\frac{1}{3}$，d=3

$b=3\times 100+800=1100$，a=800

答：(800,1100)

8. 某班在期中測驗體適能，統計了 20 位同學的坐姿體前彎成績 x(公分)與 60 秒仰臥起坐次數 y(次)，分別為 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，⋯，(x_{20}, y_{20})，且已知資料如下：
$x_1+x_2+\cdots+x_{20}=600$，$y_1+y_2+\cdots+y_{20}=700$，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{20}^2=18500$，$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{20}^2=24820$，$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{20}y_{20}=21350$。則：
   (1) 坐姿體前彎成績(x)與 60 秒仰臥起坐次數(y)的相關係數為__________。
   (2) 若波波為這其中的一位學生，已知他的坐姿體前彎成績為 20 (公分)，則可預測他的仰臥起坐次數為_________次。

(1) 相關係數 $r=\dfrac{\sum_i (x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{\sqrt{\sum_i (x_i-\mu_X)^2}\sqrt{\sum_i (y_i-\mu_Y)^2}}$，其中 $\mu_X=30, \mu_Y=35$

分子 $=\sum_i x_iy_i-n\mu_X\mu_Y=21350-20\times30\times35=350$

$\sum_i (x_i-\mu_X)^2=\sum_i x_i^2-n\mu_X^2=500$，$\sum_i (y_i-\mu_Y)^2=\sum_i y_i^2-n\mu_Y^2=320$

所以 $r=\dfrac{350}{400}=0.875$

(2) 最適直線為 $y-35=m(x-30)$，其中

$m=r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}=\dfrac{\sum_i (x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{\sum_i (x_i-\mu_X)^2}=\dfrac{350}{500}=\dfrac{7}{10}$，$y-35=\dfrac{7}{10}(x-30)$

X=20 時，y=28

答：(1)0.875　(2)28

四. 混合題

1. 設數列 $\langle a_n\rangle$ 之前 n 項和 $S_n=an^2+bn+c$，已知 $a_1=5$，前 4 項和為 38，前 10 項和為 185。試回答下列問題：
   (1) 下列哪些選項正確？**(多選題，填寫答案即可)(5 分)**
   (A) $a+b=5$　(B) $S_{30}=1455$　(C) $a_{20}=670$　(D) $S_{31}=31\times a_{15}$　(E) $\langle a_n\rangle$ 為等差數列

$\begin{cases} a+b+c=5 \\ 16a+4b+c=38 \\ 100a+10b+c=185 \end{cases}$，解出 $a=\dfrac{3}{2}, b=\dfrac{7}{2}, c=0$

$S_n=\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{7}{2}n=\dfrac{1}{2}n(3n+7)$，所以 a_n 是等差數列 公差 d=3 $a_n=3n+2$

答：ABE

(2) 請利用數學歸納法證明：

對所有的正整數 n，$\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}$ 恆成立

當 $n=1$ 時，左式 $=\frac{1}{2\times5}=\frac{1}{6+4}=$ 右式，原式成立　**(1 分)**

設 $n=k$ 時，原式成立，即 $\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\cdots+\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{k}{6k+4}$　**(1 分)**

則當 $n=k+1$ 時，

$$左式=\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\cdots+\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}+\frac{1}{(3k+2)(3k+5)}=\frac{k}{6k+4}+\frac{1}{(3k+2)(3k+5)}$$

$$=\frac{k\cdot(3k+5)+2}{2\cdot(3k+2)(3k+5)}=\frac{(3k+2)(k+1)}{2\cdot(3k+2)(3k+5)}=\frac{k+1}{6k+10}=\frac{k+1}{6(k+1)+4}=右式$$

，原式亦成立　**(3 分)**

故由數學歸納法得證，對於所有正整數 n，原式恆成立　**(1 分)**

(3) 參考(2)的結論，求 $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_{40}a_{41}}$ 之值為________。**(填充題，填寫答案即可)(5 分)**

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{40}a_{41}}=\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\ldots+\frac{1}{(3\times40+2)(3\times40+5)}=\frac{41}{6\times41+4}-\frac{1}{10}=\frac{8}{125}$$

答：$\frac{8}{125}$