例1. $\sqrt{111111111111\times 1000000000005+1}$ (建中通訊徵答)

取 a=111111111111,則 1000000000005=9a+6

111111111111x1000000000005+1

=a(9a+6)+1=(3a+1)^2，所以

$\sqrt{111111111111\times 1000000000005+1}$=3a+1=333333333334

例2.已知 m 是 $\sqrt{2}$ 的小數部分,則 $\sqrt{m^2+\frac{1}{m^2}+10}$ 的值= (彰化高中 101 年)

m=$\sqrt{2}-1$,則 $\frac{1}{m}=\sqrt{2}+1$, $m^2+\frac{1}{m^2}+10=(m+\frac{1}{m})^2+8$=16,所以 $\sqrt{m^2+\frac{1}{m^2}+10}$=4

§ 根號比大小的基本方法有兩種:(1)平方 (2)取倒數

例3.已知 a>2, $x=\sqrt{a-1}-\sqrt{a-2}$, $y=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$, $z=\sqrt{a+3}-\sqrt{a+2}$,比較

x,y,z 的大小(彰化高中 101 年)

分別取倒數,則 $\frac{1}{x}=\sqrt{a-1}+\sqrt{a-2}$, $\frac{1}{y}=\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$, $\frac{1}{z}=\sqrt{a+3}+\sqrt{a+2}$

$\frac{1}{z}>\frac{1}{y}>\frac{1}{x}>0$,所以 x>y>z

§ 雙重根號化簡

a＞b＞0 則 $\sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$

因為 $\sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\pm 2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$

例4.若 $\frac{3}{2}<a<\frac{5}{2}$,則 $\sqrt{a+\sqrt{6a-9}}+\sqrt{a-\sqrt{6a-9}}=$

$x=\sqrt{a+\sqrt{6a-9}}+\sqrt{a-\sqrt{6a-9}}$

x^2=a+$\sqrt{6a-9}$+a−$\sqrt{6a-9}$+2$\sqrt{(a+\sqrt{6a-9})(a-\sqrt{6a-9})}$

=2a+2$\sqrt{a^2-(6a-9)}$=2a+2$|a-3|$=2a+2(3-a)=6

所以 x=$\sqrt{6}$

◇習作◇

1． $\sqrt{111111+4444444444-66666}=$ 66667

2． 化簡$\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}=$ $\sqrt{5}+1$

3． 設$x<-1$,化簡$\sqrt{2x^2-1-2x\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x^2-1}=$ -x

解答

1．令 a=11111 則 4444444444=4444400000+44444=4a(9a+1)+4a，

111111=10a+1；

111111+4444444444-66666

=(10a+1)+4a(9a+1)+4a-6a

$=36a^2+12a+1=(6a+1)^2$

所以原式=6a+1=66667

2．假設原式=x,考慮 x^2

3．x<0，$x\sqrt{x^2-1}=-\sqrt{x^2(x^2-1)}$