證明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}$ 這是苡涵問的問題

考慮$(n-1)n(n+1)=n^3-n$則$\frac{1}{n^3}<\frac{1}{(n-1)n(n+1)}$

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3}<\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)})=\frac{1}{4}$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}<1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n(n+1)}<\frac{5}{4}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\delta(3)\approx1.202...$ 1979 年 Roger Apery 證明了此數是無理數

[尤拉][黎曼猜想]

分項對消法基本上分 3 種型式:(1)加減型 (2)乘除型 (3)配對型

§ 加減型

例1. $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+...+\frac{1}{97\times99}=$

例2.化簡$\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+...+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}=$ $\frac{9}{10}$

例3.計算

$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2+2\times3}+\frac{1}{1\times2+2\times3+3\times4}+......+\frac{1}{1\times2+2\times3+......+99\times100}=$

解

考慮分母的一般式$1\times2+2\times3+...+k(k+1)=(1^2+2^2+...+k^2)+(1+2+...+k)=$

$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$

所以原式=$\sum_{k=1}^{99}\frac{3}{k(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{99}\frac{3}{2}(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)})=$

$\frac{3}{2}[(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3})+(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4})+...+(\frac{1}{99\times100}-\frac{1}{100\times101})]=\frac{3}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{100\times101})$

例4.計算$\frac{1\times2^1}{2\times3}+\frac{2\times2^2}{3\times4}+\frac{3\times2^3}{4\times5}+\frac{4\times2^4}{5\times6}+......+\frac{10\times2^{10}}{11\times12}=$

解

原式=$\sum_{k=1}^{10}\frac{k\times2^k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{10}(\frac{2^{k+1}}{k+2}-\frac{2^k}{k+1})=$

$$(\frac{2^2}{3}-\frac{2}{2})+(\frac{2^3}{4}-\frac{2^2}{3})+(\frac{2^4}{5}-\frac{2^3}{4})+...+(\frac{2^{11}}{12}-\frac{2^{10}}{11})=\frac{2^{11}}{12}-\frac{2}{2}=\frac{509}{3}$$

例5.計算 $\frac{1}{4\times1^4+1}+\frac{2}{4\times2^4+1}+\frac{3}{4\times3^4+1}+......+\frac{10}{4\times10^4+1}=$

$4x^4+1=4x^4+4x^2+1-4x^2=(2x^2+1)^2-(2x)^2=(2x^2-2x+1)(2x^2+2x+1)$

$$\frac{n}{(2n^2-2n+1)(2n^2+2n+1)}=\frac{1}{4}(\frac{1}{2n^2-2n+1}-\frac{1}{2n^2+2n+1})$$

取 n=1~10 代入,得

$$\frac{1}{4}\{(1-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{13})+(\frac{1}{13}-\frac{1}{25})+..+(\frac{1}{181}-\frac{1}{221})\}=\frac{55}{221}$$

例6.設 $a_0=1$,$a_1=3$,$a_{n+1}=\frac{{a_n}^2+1}{2},n\geq1$,求 $\frac{1}{a_0+1}+\frac{1}{a_1+1}+...+\frac{1}{a_n+1}+\frac{1}{a_{n+1}+1}=$ for $n\geq1$ (中山大學 雙週一題 2011)

解

$a_{k+1}-1=\frac{1}{2}(a_k-1)(a_k+1)$,所以 $\frac{1}{a_{k+1}-1}=\frac{2}{(a_k-1)(a_k+1)}=\frac{1}{a_k-1}-\frac{1}{a_k+1}$ for $k\geq1$

$$\frac{1}{a_k+1}=\frac{1}{a_k-1}-\frac{1}{a_{k+1}-1}$$

$$\frac{1}{a_1+1}+..+\frac{1}{a_n+1}+\frac{1}{a_{n+1}+1}=$$

$$(\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_2-1})+(\frac{1}{a_2-1}-\frac{1}{a_3-1})+..+(\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1})==\frac{1}{2}-\frac{1}{a_{n+1}-1}$$

所以 $\frac{1}{a_0+1}+\frac{1}{a_1+1}+...+\frac{1}{a_n+1}+\frac{1}{a_{n+1}+1}=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{a_{n+1}1})+\frac{1}{a_{n+1}-1}=1$

例7.已知 $a_n=\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}$,則 S_{2012}=

解

分子分母同乘 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$,$a_n=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}})$$

所以 S_{2012}=

$$\frac{1}{2}\{(1-\frac{1}{\sqrt{2}+1})+(\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}})+...+(\frac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2011}}-\frac{1}{\sqrt{2013}+\sqrt{2012}})\}$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{2013}+\sqrt{2012}})=\frac{1}{2}(1-\sqrt{2013}+\sqrt{2012})$$

例8. $a_n=\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{(n-1)n}+\sqrt[3]{(n-1)^2}$，求 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_{1000}}=$

解

設 $a=\sqrt[3]{n},b=\sqrt[3]{n-1}$，則 $a^3-b^3=1$，$\frac{1}{a_n}=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=a-b$

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_{1000}}=1+(\sqrt[3]{2}-1)+(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})+...+(\sqrt[3]{1000}-\sqrt[3]{999})=10$

§ 乘除型

例9. $\frac{3^4+2^6}{7^4+2^6}\times\frac{11^4+2^6}{15^4+2^6}\times\frac{19^4+2^6}{23^4+2^6}\times\frac{27^4+2^6}{31^4+2^6}\times\frac{35^4+2^6}{39^4+2^6}\times\frac{43^4+2^6}{47^4+2^6}=$（女中102學年教師推甄）

解

$x^4+4y^4=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)$

今 $y=2$，則 $x^4+2^6=(x^2-4x+8)(x^2+4x+8)$

原式 $=\frac{5\times29}{29\times85}\times\frac{85\times173}{173\times293}\times...\times\frac{1785\times2029}{2029\times2495}=\frac{1}{481}$

（註 $(x+4)^4+2^6=(x^2+4x+8)(x^2+12x+40)$，所以符合乘除型對消法。）

§ 配對型

例10. 設 $f(x)=\frac{2}{4^x+2}$，則 $f(\frac{1}{2003})+f(\frac{2}{2003})+f(\frac{3}{2003})+...+f(\frac{2002}{2003})=$

$$\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1+\frac{1}{t}}=1$$

◇習作◇

1. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=$

2．$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=$

3．化簡 $(\frac{1}{17\times19}+1)(\frac{1}{18\times20}+1)(\frac{1}{19\times21}+1)...(\frac{1}{22\times24}+1)=$ $\frac{69}{68}$

4．$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+3+...+19}=$

5．$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{2k+1}{k(k+1)}=$ $-1+(-1)^n\frac{1}{n+1}$

6．$\frac{3}{1^2}+\frac{5}{1^2+2^2}+\frac{7}{1^2+2^2+3^2}+...+\frac{2n+1}{1^2+2^2+3^2+...+n^2}=$ $\frac{6n}{n+1}$

7．$\frac{1}{2(2^2-1)}+\frac{2}{3(3^2-1)}+\frac{3}{4(4^2-1)}+\cdots\cdots+\frac{n}{(n+1)[(n+1)^2-1]}=$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$

8．化簡 $\frac{4}{1\cdot2\cdot3}+\frac{5}{2\cdot3\cdot4}+\frac{6}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{n+3}{n(n+1)(n+2)}=$

9．已知數列 $\langle a_n\rangle$ 的一般式為 $a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$，n 為正整數，其前 n 項和為 S_n，則在數列 S_1，S_2，…，S_{2011} 中，有理數項共有幾項？(通訊徵答 8702) 43

10．求 $\frac{3^2-1^2}{1\times2\times3}+\frac{4^2-2^2}{2\times3\times4}+\frac{5^2-3^2}{3\times4\times5}+...+\frac{102^2-100^2}{100\times101\times02}=$ $2(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{101}-\frac{1}{102})$

11．$\frac{1\times2}{2\times3}+\frac{2\times2^2}{3\times4}+\frac{3\times2^3}{4\times5}+...+\frac{n\times2^n}{(n+1)(n+2)}=$ $\frac{2^{n+1}}{n+2}-1$

12．$\sum_{k=1}^{n}\frac{k\times[(k+1)!]}{2^{k+1}}=$ $\frac{(n+2)!}{2^{n+1}}-1$

13．S_n 是數列 $<a_n>$ 的前 n 項和，即 $S_n=a_1+a_2+…+a_n$，若 $S_n=n^2a_n-n(n-1)$，

$a_1=\frac{1}{2}$ 求 $a_n=$

$S_n=n^2a_n-n(n-1)$

$S_{n-1}=(n-1)^2a_{n-1}-(n-1)(n-2)$ for $n\geq2$

相減得 $a_n=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}-2(n-1)$

$(n^2-1)a_n=(n-1)^2a_{n-1}+2(n-1)$

$(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}+2$；寫成 $na_n-(n-1)a_n+a_n=2$，取 n=2，3，4，…代入，得

$2a_2-a_1+a_2=2$

$3a_3-2a_2+a_3=2$

$4a_4-3a_3+a_4=2$

…

$na_n-(n-1)a_{n-1}+a_n=2$

相加，得 $na_n-a_1+(a_2+a_3+…+a_n)=2(n-1)$

即 $na_n-2a_1+S_n=2(n-1)$

$Sn=-na_n+2n-1$ 與 $S_n=n^2a_n-n(n-1)$ 聯立,消去 S_n,得 $a_n=\dfrac{n^2+n-1}{n^2+n}$

n=1 代入檢查,亦成立。

另解, 算到 $(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}+2$ 後,取 n=2,3,4 代入

$$a_1=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$$

$$a_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}=1-\frac{1}{6}$$

$a_3=\dfrac{2}{4}\times\dfrac{5}{6}+\dfrac{2}{4}=\dfrac{11}{12}=1-\dfrac{1}{12}$,...猜測 $a_n=1-\dfrac{1}{n(n+1)}$,以下用數學歸納法證明

假設 n=k 時原式成立

則 n=k+1 時

$a_{k+1}=\dfrac{k}{k+1}\times\dfrac{k^2+k-1}{k(k+1)}+\dfrac{2}{k+2}=...=1-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$,得證。

14. [ ]表示高斯符號。求

$$\left[\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1\times2}+\sqrt[3]{2^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\times4}+\sqrt[3]{4^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5\times6}+\sqrt[3]{6^2}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{999}+\sqrt[3]{999\times1000}+\sqrt[3]{1000}}\right]=$$

(彰中 101 學年 教師甄選) 4

15. 計算 $\dfrac{(2^4+\frac{1}{4})(4^4+\frac{1}{4})(6^4+\frac{1}{4})(8^4+\frac{1}{4})(10^4+\frac{1}{4})}{(1^4+\frac{1}{4})(3^4+\frac{1}{4})(5^4+\frac{1}{4})(7^4+\frac{1}{4})(9^4+\frac{1}{4})}=$

16. 設 $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$, 試求 $f\left(\frac{1}{101}\right)+f\left(\frac{2}{101}\right)+f\left(\frac{3}{101}\right)+\cdots+f\left(\frac{100}{101}\right)$ 的值