

例1. 在分母小於 13 的最簡分數中, 比  $\frac{2}{5}$  大且最接近  $\frac{2}{5}$  分數為\_\_\_\_\_ (武陵高中 101 年)

解  $\frac{n}{m} > \frac{2}{5}$ ,  $(m,n)=1$  且  $m \leq 12$ , 則  $n > \frac{2}{5}m$

分  $m=2, 3, \dots, 12$  討論, 則  $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{3}{7}, \frac{5}{8}, \frac{4}{9}, \frac{7}{10}, \frac{5}{11}, \frac{5}{12}$

其中  $\frac{5}{12}$  最小, 即為所求。

例2. 下列 5 個分數:  $\frac{10}{17}, \frac{12}{19}, \frac{15}{23}, \frac{20}{33}, \frac{30}{49}$  的中位數為\_\_\_\_\_ (武陵高中 101 年)

解 取分子為 60, 則此五個數變成  $\frac{30}{49}, \frac{60}{102}, \frac{60}{95}, \frac{60}{92}, \frac{60}{99}, \frac{60}{98}$

由小到大排列為  $\frac{60}{102}, \frac{60}{99}, \frac{60}{98}, \frac{60}{95}, \frac{60}{92}$ , 中位數為  $\frac{60}{98}$ , 即  $\frac{30}{49}$

例3. 若  $S = \frac{1}{\frac{1}{1984} + \frac{1}{1985} + \frac{1}{1986} + \dots + \frac{1}{2015}}$ , 且  $n < S < n+1$ ,  $n$  是正整數, 則  $n =$

解 令  $a = \frac{1}{1984} + \frac{1}{1985} + \frac{1}{1986} + \dots + \frac{1}{2015}$ , 則

$\frac{1}{2015} + \frac{1}{2015} + \dots + \frac{1}{2015} < a < \frac{1}{1984} + \frac{1}{1984} + \dots + \frac{1}{1984}$ ,  $\frac{32}{2015} < a < \frac{32}{1984}$ , 所以

$\frac{1984}{32} < \frac{1}{a} < \frac{2015}{32}$ ,  $62 < \frac{1}{a} < 62.75$ , 所以  $n=62$

例4. 若  $A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{99}{100}$ , 則  $A < \frac{1}{10}$ , 試證之

解 注意  $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$

$$A^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{97}{98} \times \frac{97}{98} \times \frac{99}{100} \times \frac{99}{100}$$

$$< \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{97}{98} \times \frac{98}{99} \times \frac{99}{100} \times 1 = \frac{1}{100}, \text{ 所以 } A < \frac{1}{10}$$

◇習作◇

1. 若  $A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{99}{100}$ ,  $B = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{100}{101}$ , 則下列何者正確?

(A)  $A > \frac{1}{10}$  (B)  $A < \frac{1}{10}$  (C)  $B > \frac{1}{11}$  (D)  $B < \frac{1}{11}$

2. 證明  $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2005}{2006} < \frac{1}{\sqrt{2006}}$

◇解答◇

1.

2. 因為  $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$ , 所以

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2005}{2006} < \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{2004}{2005} \times 1$$

$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2005}{2006}\right)^2 < \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2005}{2006}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2004}{2005}\right) = \frac{1}{2006}$$