

1. 設  $n$  為一正整數, 且滿足  $n^2-735$  是某整數的四次方, 求  $n$  的所有可能的值  
(94 年 北區第二區)
2. 試求出所有的正整數  $a, b$ , 使得  $\frac{a^2+b}{ab+1}$  為正整數 (92 年 北區 新竹)
3.  $n$  是正整數,  $n^4+4^n$  是質數,  $n=$  (92 年 北區 新竹)
4. 對於任意大於 1 的正整數, 證明  $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}$  都不是整數

解答

1. 設  $n^2-735=m^4$ , 則  $n^2-m^4=735$ ,  $(n-m^2)(n+m^2)=735$

$n+m^2=$					
$n-m^2=$					

得  $n=56$  或  $124$

2. (1)  $a=1, b$  是任意正整數 (2)  $a=n$  (大於 1),  $b=n+1$  (3)  $a=n^2, b=n$

3. 解  $n$  顯然不是偶數, 因此令  $n=2m+1$

$$(2m+1)^4+4 \times 4^{2m} = [(2m+1)^2+2 \times 4^m]^2 - 4 \times (2m+1)^2 \times 4^m$$

$$= [(2m+1)^2+2 \times 4^m - 2 \times (2m+1) \times 2^m][(2m+1)^2+2 \times 4^m+2 \times (2m+1) \times 2^m]$$

所以  $[(2m+1)^2+2 \times 4^m - 2 \times (2m+1) \times 2^m]=1$

$[(2m+1)-2^m]^2+4^m=1$ , 唯一的可能是  $(2m+1)-2^m=0$  且  $4^m=1$ , 即  $m=0$ , 所以  $n=1$ ,

此質數為 5

4. 這一題大約 10 年前台大推甄 參考 (1) 中央大學數學系 (2) Math Pro

<http://math.pro/db/thread-414-1-3.html>

- 5.