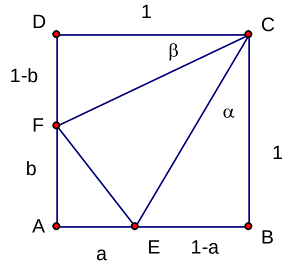
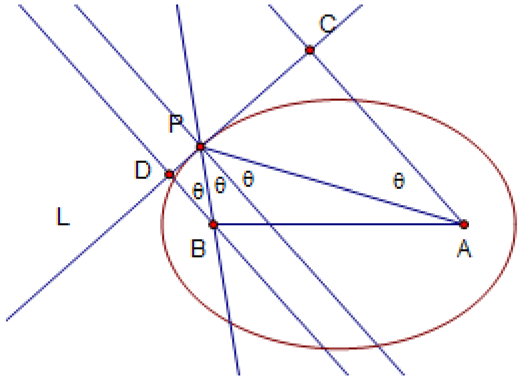
習作

1. Γ:x^2=4cy,c>0;自 x 軸上方遠處沿直線 x=a ($a \neq 0$) 射出一雷射光,經過拋物Γ的兩次反射後,光束沿著直線 x=b 射出。證明:不論 a 值為何,a 與 b 的乘積為定值 (2005 北區 新竹)



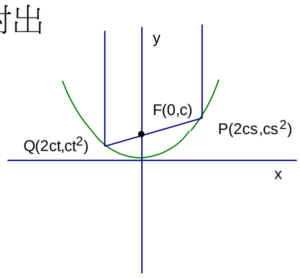
2. 正方形 ABCD 的邊長=1,在 $\overline{AB},\overline{AD}$ 上各取一點 E,F,使得 ΔAEF 的周長=2,求 $\angle ECF =$
(2004 北區 花蓮)

3. A、B 是橢圓的焦點,P 是橢圓上任一點,設 $\overline{PA}+\overline{PB}=2a$ 。L 是過 P 的切線。過 A、B 做 L 的垂線,垂足為 C、D,則 $\overline{AC}\times\overline{BD}$ 是一常數。



解答

1. 證明 直線 x=a 上的光線碰到Γ上的點 P(2cs,cs^2)(即 a=2cs),反射通過焦點 F(0,c)後碰到Γ上的點 Q(2ct,ct^2),再由 x=b 射出(即 b=2ct)



因為 P,F,Q 共線,所以 $\dfrac{ct^2-cs^2}{2ct-2cs}=\dfrac{ct^2-c}{2ct-0}$

$\dfrac{t+s}{2}=\dfrac{t^2-1}{2t}$,st=-1,所以 $a\times b=(2cs)\times(2ct)=-4c^2$

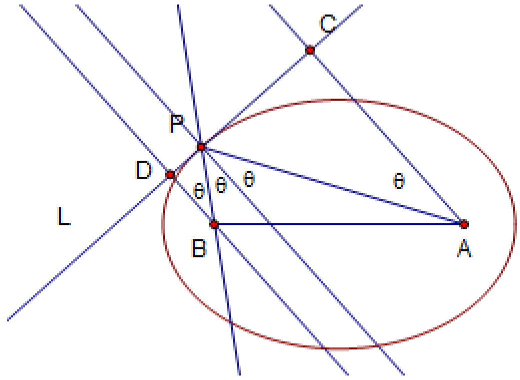
2. $a+b+\sqrt{a^2+b^2}=2$, $\sqrt{a^2+b^2}=2-a-b$,平方化簡,得 ab-2a-2b+2=0

$\tan\alpha=1-a$, $\tan\beta=1-b$,則 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{(1-a)+(1-b)}{1-(1-a)(1-b)}=...=1$

所以 $\alpha+\beta=45^0$,即 $\angle ECF=45^0$

3. A、B 是橢圓的焦點,P 是橢圓上任一點,則 $\overline{PA}+\overline{PB}=2a$ 。

L 是過 P 的切線。過 A、B 做 L 的垂線，垂足為 C、D，則 $\overline{AC}\times\overline{BD}$ 是一常數。



證明

過 P 作法線，則 $\angle PAC=\angle PBD=\theta$，$\angle APB=2\theta$

假設 $\overline{PA}=x,\overline{PB}=y$，則 x+y=2a

$$\cos 2\theta=\frac{x^2+y^2-(2c)^2}{2xy}=2\cos^2\theta-1$$

$$2\cos^2\theta=\cos 2\theta+1=\frac{x^2+y^2-4c^2+2xy}{2xy}=\frac{(x+y)^2-4c^2}{2xy}$$

則 $\overline{AC}\times\overline{BD}=x\cos\theta\times y\cos\theta=xy\times\dfrac{4a^2-4c^2}{4xy}$ $=a^2-c^2$=橢圓半短軸長的平方，是一常數。

同理，雙曲線中，假設

$\overline{PA}=x,\overline{PB}=y$

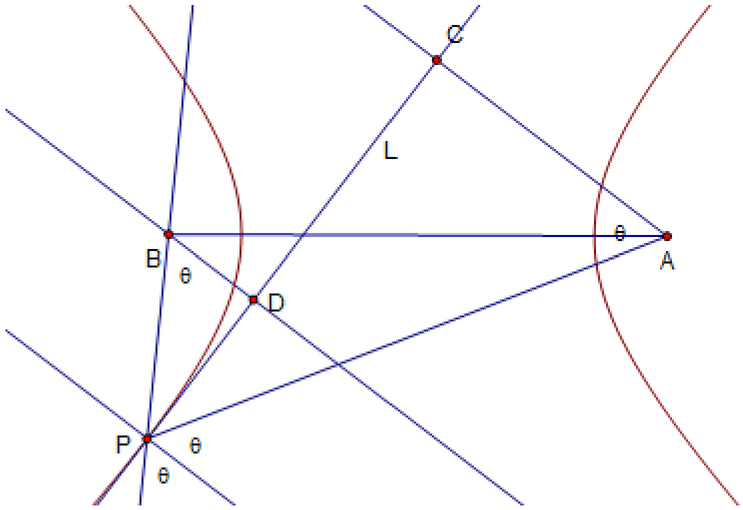
則 $|x-y|=2a$

L 是過 P 點的切線，則

$$\cos(180^0-2\theta)=\frac{x^2+y^2-(2c)^2}{2xy}$$

$\overline{AC}\times\overline{BD}=x\cos\theta\times y\cos\theta$

$=\ldots=c^2-a^2=b^2$(半共軛軸長平方)



4.