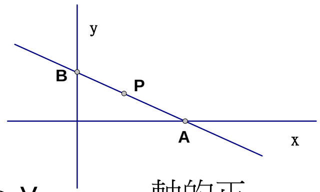
§ 算幾不等式

$x_1,x_2,\ldots,x_n$ 是正數,A=$\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$,G=$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$,則 $A\ge G$

◇習作◇



1. 過 P(3,2)作一直線 L,分別交 x,y 軸的正向於 A,B 兩點,ΔOAB 有最小值時,求 L
2. 點 P(a,b)在第一象限內，過點 P 作一直線 L，分別交 x、y 軸的正向於 A、B 兩點．那麼，$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 取最小值時，直線 L 的斜率=
3. x,y 是實數,且 x+3y=1,f(x,y)=3^x+27^y,當(x,y)=____時,f(x,y)最小值=
4. 證明周長固定的三角形中,以正三角形面積最大。
5. a,b,c 是正數,且(1+a)(1+b)(1+c)=8,試證 $abc\le 1$
6. 求 f(x)=$\sqrt{\dfrac{1}{3}-x}+\sqrt{x-\dfrac{1}{5}}$ 的最大值 M 與最小值 m (科學班 一中 101)
7. 設多項式 f(x)=x^3+ax^2+bx+1,其中 $a\ge 0,b\ge 0$,且 f(x)=0 三根都是實數,試證 $f(2)\ge 27$ (TWMO 92 年獨立研究)

◇解答◇

1. 略
2. 直線 L 過 P(a,b),分別交 x、y 軸的正向於 A(c,0)、B(0,d)兩點,則

$\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{d}=1$,

(c-a)(d-b)=ab, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$=$(c-a)^2+(d-b)^2+(a^2+b^2)$

$\frac{(c-a)^2+(d-b)^2}{2} \geq \sqrt{(c-a)^2(d-b)^2} = ab$,即$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$有最小值時

c-a=d-b=$\sqrt{ab}$,直線 L 的斜率

=$\frac{-d}{c} = \frac{-(b+\sqrt{ab})}{a+\sqrt{ab}} = \frac{-\sqrt{b}(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\frac{\sqrt{ab}}{a}$

3. $3^x+27^y=3^{1-3y}+3^{3y}$, $\frac{3^{1-3y}+3^{3y}}{2} \geq \sqrt{3^{1-3y}\times 3^{3y}}$ =$\sqrt{3}$,此時

1-3y=3y,y=$\frac{1}{6}$,x=$\frac{1}{2}$,即(x,y)=($\frac{1}{2}$,$\frac{1}{6}$)時,f(x,y)有最小值$2\sqrt{3}$

4. 略

5. $\frac{1+a}{2} \geq \sqrt{a}, \frac{1+b}{2} \geq \sqrt{b}, \frac{1+c}{2} \geq \sqrt{c}$,三式相乘,得$1 \geq \sqrt{abc}$,即$abc \leq 1$

6. $\frac{\sqrt{\frac{1}{3}-x}+\sqrt{x-\frac{1}{5}}}{2} \geq \sqrt{(\frac{1}{3}-x)(x-\frac{1}{5})}$,$(\frac{1}{3}-x)(x-\frac{1}{5}) = -x^2+\frac{8}{15}x-\frac{1}{15}$

$= -(x-\frac{4}{15})^2+\frac{1}{225}$在 x=$\frac{4}{15}$有最大值

算幾不等式在$\sqrt{\frac{1}{3}-x} = \sqrt{x-\frac{1}{5}}$時"="號成立,此時 x=$\frac{4}{15}$,所以在 x=$\frac{4}{15}$時 f(x) 有最大值 M=$\frac{1}{15}$ 。

在$x=\frac{1}{3}$或$x=\frac{1}{5}$時產生最小值 m=$\sqrt{\frac{8}{15}}$

7. 顯然 f(x)=0 的根都是負數,假設 f(x)=0 的三根為α,β,γ,則

$\alpha+\beta+\gamma=-a$,

$\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=b, \alpha\beta\gamma=-1$,令$\alpha=-p, \beta=-q, \gamma=-r$,則 p,q,r 皆為正數

由算幾不等式$\frac{p+q+r}{3} \geq \sqrt[3]{pqr}=1$,所以$a \geq 3$

$\frac{pq+qr+pr}{3} \geq \sqrt[3]{(pq)(qr)(pr)}=1$,所以$b \geq 3$

f(2)=9+4a+2b≥9+12+6=27,得證。