§ $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \le |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$ 稱為 Cauchy 不等式,等號成立的充要條件是 $\vec{u}//\vec{v}$ 。

例1. 已知 $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}+\frac{z^2}{1}=1$,求 x-2y+3z 的最大值,並求此時的 x,y,z

取 $\vec{u}=(\frac{x-1}{2},\frac{y+2}{3},z)$, $\vec{v}=(2,-6,3)$,則由 Cauchy 不等式

$[(x-1)-2(y+2)+3z]^2 \le 1\times(4+36+9)$

$(x-2y+3z-5)^2 \le 49$, $-7 \le x-2y+3z-5 \le 7$

$-2 \le x-2y+3z \le 12$, 所以 x-2y+3z 最大值=12

此時 $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{-18}=\frac{z}{3}$,解得 $x=\frac{11}{7}, y=-\frac{32}{7}$, $z=\frac{3}{7}$

例2. a,b 是正數,求 $(4a+b)(\frac{1}{a}+\frac{9}{b})$ 的最小值=

取 $\vec{u}=(2\sqrt{a},\sqrt{b}),\vec{v}=(\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{3}{\sqrt{b}})$ 代入柯西不等式

$(2+3)^2 \le (4a+b)(\frac{1}{a}+\frac{9}{b})$,所以 $(4a+b)(\frac{1}{a}+\frac{9}{b})$ 的最小值=25

例3. a,b,c 是正實數,試證 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$

原式兩邊加 3,即原式 $\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\ge\frac{9}{2}$

$(a+b+c)(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b})\geq\frac{9}{2}$

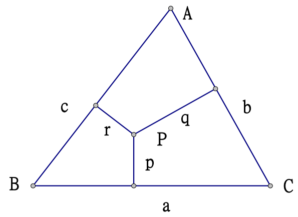
$[(b+c)+(c+a)+(a+b)](\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b})\geq 9$

取$\vec{u}=(\sqrt{b+c},\sqrt{c+a},\sqrt{a+b})$，$\vec{v}=(\frac{1}{\sqrt{b+c}},\frac{1}{\sqrt{c+a}},\frac{1}{\sqrt{a+b}})$代入柯西不等式即可。

例4. P是ΔABC內一點,P到$\overline{BC},\overline{AC},\overline{AB}$邊的垂足為D,E,F,假設

$\overline{BC}=a,\overline{AC}=b,\overline{AB}=c$，$\overline{PD}=p,\overline{PE}=q,\overline{PF}=r$

求f(P)= $\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}$的最小值



$\Delta=\frac{1}{2}(ap+bq+cr)$是一常數,令$\vec{u}=(\sqrt{ap},\sqrt{bq},\sqrt{cr})$，$\vec{v}=(\sqrt{\frac{a}{p}},\sqrt{\frac{b}{q}},\sqrt{\frac{c}{r}})$

由Cauchy不等式,$(a+b+c)^2\leq(ap+bq+cr)(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r})$，其中a+b+c=周長,ap+bq+cr=2ΔABC是常數

f(P)有最小值時,$\vec{u}//\vec{v}$，p=q=r,即P點是內心。

例5. a,b,c,d,e是實數,滿足(1)a+b+c+d+e=8 (2)$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$,求e的最大值

$(8-e)^2=(a+b+c+d)^2\leq(a^2+b^2+c^2+d^2)(1^2+1^2+1^2+1^2)=4(16-e^2)$

$e^2-16e+64\leq-4e^2+64$

$5e^2-16e\leq0$，$0\leq e\leq\frac{16}{5}$，e的最大值=$\frac{16}{5}$

§ 習作

1. a,b,c是正實數,試證$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\geq abc(a+b+c)$

2. 試證$a^2+b^2+c^2+d^2\geq ab+bc+cd+da$

3. a,b,c是正實數,試證$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geq 9abc$

4. a,b,c 是正實數,試證$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\geq\frac{9}{a+b+c}$

5. 已知 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 皆為正實數($n\geq 2$),$s=a_1+a_2+\ldots+a_n$,試證

$\frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+\ldots+\frac{s}{s-a_n}\geq\frac{n^2}{n-1}$

6. 非負實數 $a_1,a_2,...a_n$ 滿足 $a_1+a_2+...+a_n=1$,$s=a_1+a_2+\ldots+a_n$,求

$\frac{a_1}{1+s-a_1}+\frac{a_2}{1+s-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{1+s-a_n}$的最小值=

7. a,b,c,d 是正實數,且 a+b=1,試證(ac+bd)(bc+ad)≥cd

8. 求 $f(x)=\frac{4}{\cos^2 x}+\frac{9}{\sin^2 x}$的最小值

9. a,b,c 是三角形的三邊長,試證 $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$

10. 三角形的面積=S,三邊長為 a,b,c,試證 $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$

11. a,b,c 是正數,abc(a+b+c)=5,求 ab+bc+ac 的最小值

12. 有蓋圓柱形的的體積固定,問最好的圓筒應該怎樣設計?

13. 證明:若 x>0,y>0 且 $x^3+y^3=x-y$,則 $x^2+y^2<1$ (94 年南區高雄區)

14. 設兩正數a,b滿足2ab+3a+6b=27,則a^2+4b^2的最小值=(92年北區新竹)

15. 設 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 皆為正整數,求證$\sum_{k=1}^{n}a_k\leq\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_1}$(94 年數學能力競賽 台南區)

....

16. 設 a,b,c 是三角形的三邊長,且 $p=\frac{a+b+c}{2}$,內切圓半徑=r,證明

$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geq\frac{1}{r^2}$

§ 解答

1. 取$\vec{u}=$(ab,bc,ac),$\vec{v}=$(ac,ab,bc)

2. 取$\vec{u}=$(a,b,c,d),$\vec{v}=$(b,c,d,a)

3. …

4. …

5. 考慮$(n-1)s=ns-(a_1+a_2+...+a_n)=(s-a_1)+(s-a_2)+...+(s-a_n)$

6. $\dfrac{n}{2n-1}$

7. 取$\vec{u}=(\sqrt{ac},\sqrt{bd}),\vec{v}=(\sqrt{ad},\sqrt{bc})$

8. 取$\vec{u}=(\dfrac{2}{\cos\theta},\dfrac{3}{\sin\theta}),\vec{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$

9. 令 a=y+z,b=z+x,c=x+y,代入原式化簡後取

$\vec{u}=(\dfrac{y}{\sqrt{z}},\dfrac{z}{\sqrt{x}},\dfrac{x}{\sqrt{y}}),\vec{v}=(\sqrt{z},\sqrt{x},\sqrt{y})$

10. …

11. $\sqrt{15}$

12. 圓筒的高等於底圓直徑時用料最省

13. 令$\vec{u}=(x\sqrt{x},y\sqrt{y}),\vec{v}=(\sqrt{x},\sqrt{y})$,由 Cauchy 不等式$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2\le|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$

$(x^2+y^2)^2\le(x^3+y^3)(x+y)=(x-y)(x+y)=x^2-y^2<x^2+y^2$,所以

$x^2+y^2<1$

14. 令 t=2ab,則 3a+6b=27-t,由算幾不等式$\dfrac{3a+6b}{2}\ge\sqrt{18ab}$----(1),得

$\dfrac{27-t}{2}\ge\sqrt{9t}$,平方,$(27-t)^2\ge36t$,$t^2-90t+27^2\ge0$

$(t-81)(t-9)\ge0$,$t\ge81$(不合)或 $t\le9$,$27-t\ge18$

令$\vec{u}=(a,2b),\vec{v}=(1,1)$,則$(a+2b)^2\le(a^2+4b^2)(1+1)$---(2)

$a^2+4b^2\ge\dfrac{1}{2}(\dfrac{27-t}{3})^2\ge18$,所以 a^2+4b^2 的最小值=18,此時由(1)或(2)式中都

得到 a=2b,所以 a=2b=3

15. $(\dfrac{a_1^2}{a_2}+\dfrac{a_2^2}{a_3}+...+\dfrac{a_n^2}{a_1})(a_2+a_3+...+a_n+a_1)$

$=[(\dfrac{a_1}{\sqrt{a_2}})^2+(\dfrac{a_2}{\sqrt{a_3}})^2+...+(\dfrac{a_n}{\sqrt{a_{\partial1}}})^2][(\sqrt{a_2})^2+(\sqrt{a_3})^2+...+(\sqrt{a_1})^2]$

$\ge(\dfrac{a_1}{\sqrt{a_2}}\times\sqrt{a_2}+\dfrac{a_2}{\sqrt{a_3}}\times\sqrt{a_3}+...+\dfrac{a_n}{\sqrt{a_1}}\times\sqrt{a_1})^2=(a_1+a_2+…+a_n)^2$

即$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\dots+\frac{a_n^2}{a_1}\geq$ $(a_1+a_2+\dots+a_n)$ 得證

16. 由 Heron 公式$\Delta ABC=\sqrt{p(p-a)(p-b)}=pr$,兩邊平方得

$p(p-a)(p-b)(p-c)=p^2r^2$

即$(p-a)(p-b)(p-c)=pr^2$,

原命題即證明$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geq\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$

$(p-a)+(p-b)+(p-c)=3p-(a+b+c)=p$

令$A=\frac{1}{p-a},B=\frac{1}{p-b},C=\frac{1}{p-c}$則

$A^2+B^2+C^2-AB-AC-BC=\frac{1}{2}\{(A-B)^2+(B-C)^2+(A-C)^2\}\geq 0$

即$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geq\frac{1}{(p-a)(p-b)}+\frac{1}{(p-a)(p-c)}+\frac{1}{(p-b)(p-c)}$

右式=$\frac{(p-c)+(p-b)+(p-a)}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$得證。

1. 算幾不等式------傳播季刊 18 卷第 4 期

2. 凸函數,Jensen不等式與Legender變換------傳播季刊 19 卷第 4 期

3. 算幾不等式面面觀------傳播季刊 26 卷第 2 期