

例1. 對所有不為 0 的實數  $x$ ,  $\pi f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \pi x^2$ , 求  $f(x) =$

解 原式  $\pi f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \pi x^2 \dots (1)$  中, 取  $x$  用  $\frac{1}{x}$  代入

$$\text{得 } \pi f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{\pi}{x^2} \dots (2), (1) \times \pi - (2) \text{ 得 } (\pi^2 - 1)f(x) = \pi^2 x^2 - \frac{\pi}{x^2}$$

$$\text{所以 } f(x) = \frac{\pi^2}{\pi^2 - 1} x^2 - \frac{\pi}{\pi^2 - 1} \frac{1}{x^2}$$

例2. 函數  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 對任意實數  $x$ ,  $f(x) \neq 0$

若對於任意  $x, y$  恆有  $f(x)f(y) = f(x+y)$  則

$$(1) f(x) > 0 \quad (2) f(0) = 1 \quad (3) f(-x) = \frac{1}{f(x)} \quad (4) f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$$

試證之。

證明

這是一個函數方程式, 基本上  $f(x) = a^x$  滿足它, 我們可以說  $f(x) = a^x$  就是此方程式的唯一解嗎?

### § 習作

1. 對所有不為 0 的實數  $x$ , 函數  $f(x)$  滿足  $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x^2$  求  $f(x) =$

2. 設實數函數  $f(x)$  滿足函數方程式  $f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1+x \quad (x \neq 0, 1)$ , 求  $f(x)$ 。(92 學年高中數學能力競賽 台中一中)

3.  $f: (\mathbb{N}, \mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$

$$(1) f(x, x) = x$$

$$(2) f(x, y) = f(y, x)$$

$$(3) f(x, y) = f(x, x+y)$$

求  $f(x, y) =$  (通過問題學解題 九章出版社 p.102)

4. 函數  $f(x): (0, 1) \rightarrow [0, \infty]$ , 滿足:

$$(1) f(1) = 0 \quad (2) f \text{ 是遞減函數} \quad (3) f \text{ 是連續函數} \quad (4) f(pq) = f(p) + f(q)$$

則  $f(x) = -k \log_2 x, k > 0$ , 試證之 (數學傳播季刊第 22 卷第 3 期 p.29 蔡聰明)

5.  $f$  是實數函數, 對任意實數  $u, v$  均滿足  $f(u)f(v) = f(u-2v) + f(u+2v)$ , 且  $f(1) = 1$ , for 正整數  $n$ , 則  $f(12n+1) =$  2005 南區(高屏區)(一)
6. 求所有的方程式  $f(x)$  滿足  $(x+1)f(x) = (x-1)f(x+1)$  (中山大學雙週一題)
7. 求出所有函數  $f(x) : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$  滿足  $f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x$ , 其中  $x \neq \pm 1$  (中山大學應數系 100 學年度第二學期)

§ 解答

1. 解  $x$  用  $\frac{1}{x}$  代入, 得 
$$\begin{cases} 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x^2 \\ f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 2\frac{1}{x^2} \end{cases}$$

$(1) \times 2 - (2)$ ,  $3f(x) = 4x^2 - 2\frac{1}{x^2}$ , 所以  $f(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{3}\frac{1}{x^2}$

2.  $f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1+x \dots (1)$ ,  $x$  用  $\frac{x-1}{x}$  代入, 得 (2),  $x$  用  $\frac{-1}{x-1}$  代入, 得 (3)

$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{-1}{x-1}\right) = 1 + \frac{x-1}{x} \dots (2)$

$f\left(\frac{-1}{x-1}\right) + f(x) = 1 - \frac{1}{x-1} \dots (3)$ ,  $(1) - (2) + (3)$   $2f(x) = x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$

3.  $f(x, y) = \gcd(x, y)$

4. ...

5. let  $v=0$  則  $f(u)f(0) = f(u) + f(u) = 2f(u)$ , 所以  $f(0) = 2$

let  $u=1, v=-1$  則  $f(1)f(-1) = f(3) + f(-1)$  則  $f(3) = 0$

let  $v=1$  則  $f(u) = f(u-2) + f(u+2)$ , 改成  $f(u+2) = f(u) - f(u-2)$

$f(1) \quad f(3) \quad f(5) \quad f(7) \quad f(9) \quad f(11) \quad f(13) \quad f(15) \quad f(17)$

1      0      -1      -1      0      1      1      0      -1

$f(19) \quad f(21) \quad f(23) \quad f(25) \quad f(27) \quad \dots$

-1      0      1      1      0      得  $f(12n+1) = 1$

$$6. f(x) = ax(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-10)$$

$$7. f(x) = \frac{4x}{1-x^2} - \frac{x}{2}$$