§ 因式分解

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$

例1. 因式分解 $a^2b+b^2c+c^2a-ab^2-bc^2-ca^2=$ (彰化高中 101 年)

解

假設原式是 a 的多項式 f(a),a 用 b 代入得 $b^3+b^2c+c^2b-b^3-bc^2-cb^2=0$,由因式定理知原式有因式 a-b,同理原式有因式 a-c,b-c

$a^2b+b^2c+c^2a-ab^2-bc^2-ca^2=k(a-b)(a-c)(b-c)$,比較等號兩邊 a^2b 的係數,知 k=1,所以

$a^2b+b^2c+c^2a-ab^2-bc^2-ca^2=(a-b)(a-c)(b-c)$

例2.設 n 為一正整數,且滿足 n^2-735 是某整數的四次方,求 n 的所有可能的值

(全國高中數學競試 94 年 北區第二區)

解

設 $n^2-735=m^4$,則 $n^2-m^4=735$,$(n-m^2)(n+m^2)=735$

$n+m^2=$					
$n-m^2=$					

得 n=56 或 124

例3.x^5+x+1 如何分解。

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$x^2+x+1=0$ 的解為 ω,則 ω 滿足(1) $\omega^2+\omega+1=0$ (2) $\omega^3=1$

$f(x)=x^5+x+1$,則 $f(\omega)=\omega^5+\omega+1=\omega^2+\omega+1=0$,這表示 f(x) 有因式 x^2+x+1

所以 $x^5+x+1=(x^2+x+1)(x^3+\ldots)$

同理 $x^8+x^4+1=(x^2+x+1)(\ldots)$

例4. a,b 是正實數,滿足 $a^3+b^3+3ab=1$,求 $(a+\frac{1}{a})^3+(b+\frac{1}{b})^3$ 的最小值(92 年全國高中數學競賽試題)

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]$ 得到推論

(1) a+b+c=0 時,$a^3+b^3+c^3=3abc$

(2) 若 $a+b+c\neq 0$,且 $a^3+b^3+c^3=3abc$,則 a=b=c

原式改成 $a^3+b^3+(-1)^3-3ab(-1)=0$,

$(a+b-1)[(a-b)^2+(a+1)^2+(b+1)^2]=0$,則 $a+b=1$ 或 $a=b=-1$(不合)

由算幾不等式 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\Rightarrow ab\leq\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{ab}\geq 4$

$(a+\frac{1}{a})^3+(b+\frac{1}{b})^3=(a^3+b^3)+3(a+b)+3(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=1-3ab\geq 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$…(1)

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{ab}\geq 4$…(2)

$\dfrac{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}}{2}\geq\sqrt{\frac{1}{a^3}\times\frac{1}{b^3}}\geq 8$…(3),

由(1)(2)(3)得 $(a+\frac{1}{a})^3+(b+\frac{1}{b})^3\geq\frac{1}{4}+3+12+16$,當 a=b 時(1)(2)(3)的等號同時成立,所以當 $a=b=\frac{1}{2}$ 時,$(a+\frac{1}{a})^3+(b+\frac{1}{b})^3$ 有最小值 $31\frac{1}{4}$

註 設 $g(x)=(x+\frac{1}{x})^3$,則 g(x)為(0,1)上的凸函數,由 b=1-a 可得

$f(a,b)=g(a)+g(1-a)\geq 2g[\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}(1-a)]=2g(\frac{1}{2})=\frac{125}{4}$

◇習作◇

1. $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ 因式分解=

2. $a+b+c=4$,$a^2+b^2+c^2=14$,$a^3+b^3+c^3=34$,求 abc= -6

3. 下列哪一個多項式可以因式分解?

 (A)$x^4+x^3+x^2+1$ (B)$x^4+x^3+x^2+2$ (C)$x^4+x^3+x^2+3$ (D)$x^4+x^3+x^2+4$

4. 證明 $1996^2+1996^2\times1997^2+1997^2$ 是一完全平方數

 設 $x=1996$,$x^2+x^2(x+1)^2+(x+1)^2=x^4+2x^3+3x^2+2x+1=(x^2+x+1)^2$

5. 利用因式分解證明海龍公式