§ 解聯立方程式

1．狗、兔和貓在一條直線的跑道上進行賽跑，開始時，兔在狗前面 50 米,貓在兔前面 50 米，十時正牠們同時開跑，十時零二分，狗追上了兔。十零三分，狗追上了貓，問兔追上貓是十時幾分？

2．酒精 60 公克和水 90 公克混合成稀溶液,酒精 90 公克和水 30 公克混合成濃溶液。現在要用這兩種溶液配成酒精和水各占一半的溶液 100 公克,則稀溶液應取___公克。(彰化高中 101 年)

3．方程組 $\begin{cases} \dfrac{xy+x}{x+y+1}=2 \\ \dfrac{xz+2x}{x+z+2}=3 \\ \dfrac{(y+1)(z+2)}{y+z+3}=4 \end{cases}$ 中,z 的解=

4．實數 x,y,z ，滿足 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^3+y^3+z^3=3 \\ x^5+y^5+z^5=15 \end{cases}$,則 $x^2+y^2+z^2=$ （建中通訊 70 期）

5．已知 $\begin{cases} a+b=8 \\ ax+by=9 \\ ax^2+by^2=57 \\ ax^3+by^3=111 \end{cases}$ = 求 $ax^4+by^4=$

6．已知 $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=7 \\ x^3+y^3+z^3=16 \end{cases}$,求 $x^4+y^4+z^4=$

7．求 $\begin{cases} x+y+z=w \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{w} \end{cases}$ 的所有實數解（中山大學雙週一題）

◇解答◇

1．假設狗、兔和貓的速度為每分鐘 x,y,z 米,則 50=2(x-y),100=3(x-z),化簡得

y-z=$\dfrac{25}{3}$,50=k(y-z),k=6,兔於十時零六分追上貓

2. 設取稀溶液 x 公克,濃溶液 y 公克,則

$$\begin{cases}\frac{6}{15}x+\frac{9}{12}y=50\\ \frac{9}{15}x+\frac{3}{12}y=50\end{cases}$$,解得 x=$\frac{500}{7}$

3. (1)式取倒數,得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y+1}=\frac{1}{2}\ldots(4)$

(2)式取倒數,得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{z+2}=\frac{1}{3}\ldots(5)$

(3)式取倒數,得 $\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+2}=\frac{1}{4}\ldots(6)$

(5)+(6)-(4),得 $\frac{2}{z+2}=\frac{1}{12}$,得 z=22

4. 令 A=x+y+z=0, B=xy+yz+xz, C=xyz, $S_n=x^n+y^n+z^n$,則

$S_{n+3}=x^{n+3}+y^{n+3}+z^{n+3}$

$=(x+y+z)(x^{n+2}+y^{n+2}+z^{n+2})-(xy+yz+xz)(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1})+xyz(x^n+y^n+z^n)=AS_{n+2}-BS_{n+1}+CS_n$

$S_1=x+y+z=0, S_2=x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+xz)=-2B$

$S_3=x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+xz)(x+y+z)+3xyz=3C=3$,

所以 C=1, $S_4=-BS_2+CS_1=2B^2$

$S_5=-BS_3+CS_2=-3B-2B=-5B=15$, B=-3,所以 $x^2+y^2+z^2=S_2=-2B=6$

5. 假設 $f(n)=ax^n+by^n$,原題目即,已知 f(0)=8,f(1)=9,f(2)=57,f(3)=111,求 f(4)=

假設 x,y 是 $t^2-At+B=0$ 的兩根,則 $x^2=Ax-B\ldots(1)$,$y^2=Ay-B\ldots(2)$

(1)兩邊同乘以 ax^n,則 $ax^{n+2}=Aax^{n+1}-Bax^n$

(2)兩邊同乘以 by^n,則 $by^{n+2}=Aby^{n+1}-Bby^n$

上兩式相加,則 f(n+2)=Af(n+1)-Bf(n)

則 f(2)=Af(1)-Bf(0), f(3)=Af(2)-Bf(1)

57=9A-8B, 111=57A-9B,解得 A=1, B=-6,所以

f(4)=f(3)-6f(2)=111-342=-231

6. …

7. $\begin{cases} x+y=w-z \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{w}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{z-w}{wz} \end{cases}$ 兩式相除得 xy=-wz…(1),同理

yz=-wx…(2),xz=-wy…(3)

(1)$\times(2)\times(3)$,$(xyz)^2=-w^3xyz$,即 $xyz=-w^3$

(1)+(2)+(3) xy+yz+xz=-w(x+y+z)=$-w^2$

所以 x,y,z 是 $t^3-wt^2-w^2t+w^3=0$ 的三根,$(t-w)^2(t+w)=0$

得(x,y,z,w)=(k,k,-k,k),(k,-k,k,k),(-k,k,k,k) for $\forall k\in R, k\neq 0$