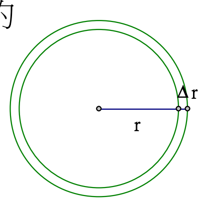
§ 面積與體積

圓的面積 A(r)=πr^2 ,周長 L(r)=$2\pi r$

球的體積 V(r)=$\frac{4}{3}\pi r^3$,表面積 S(r)=$4\pi r$ 。

我們發現 V'(r)=S(r);A'(r)=L(r)。這有麼道理嗎?

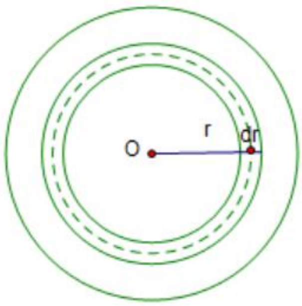
假設半徑=r 的球體積等於 V(r),塗上厚度等於 dr 的油漆,則油漆的體積等於 V(r+dr)-V(r)=A(r)dr。



當 dr 非常小的時候,則 $\lim_{dr\to 0}\frac{V(r+dr)-V(r)}{dr}=A(r)$;即 V'(r)=A(r)

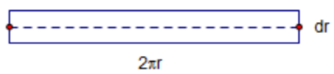
體積是面積之積也,這是古希臘幾何學家的想法,也是現代積分學的濫觴。

2021 年 APCalculus Free Reponse 第一題



離圓形培養皿中心 r 公分處的細菌密度為一漸增可微函數 f(r)mg/cm²， $0\le r\le 4$

則細菌的總重量為 $2\pi\int_0^4 rf(r)dr$



以下解釋一下此積分式的由來
把環狀區域拉直
環狀區域的面積 $dA=2\pi rdr$

此區域的細菌重量=面積 x 密度

$dm=f(r)dA=2\pi rf(r)dr$ ，所以細菌總重量 $M=2\pi\int_0^4 rf(r)dr$

---

1. 西元前 5 世紀,原子論學派的 Democritius 就導出角錐的體積等於三分之一底面積乘以高。
2. 阿基米德(BC287~212)導出橢圓,拋物線,球面的體積,表面積。
3. Bonaventura Cavalieri(1598~1647)的 Cavalieri 原理及其著作請看"微積分發展史"p115,C.H.Edwards 原著,凡異出版。

4. Cavalieri 原理在中國叫作"祖"日恒"(音茛)原理",記載在"九章數學"卷4,"少廣"---開立圓術,李淳風註,原文是"冪勢既同,則積不容異"。