

§ 二項級數

因為在證明 $f(x) = x^n, f'(x) = nx^{n-1}$ 的過程中用到二項式定理，所以有這篇。

我們知道二項式定理：

$$(1+x)^n = 1 + C_1^n x + C_2^n x^2 + \dots + C_n^n x^n \quad \text{其中 } n \text{ 是正整數}$$

牛頓在 1665 年把 n 推廣到負整數與分數，並且在 1676 年兩度給萊布尼茲寫了信，這是微積分的一個重要發展。

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n}x^n, \quad \text{其中 } |x| < 1$$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

例如

$$1. \quad \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \dots$$

$$2. \quad \sqrt[3]{1.02} = (1+0.02)^{\frac{1}{3}} = 1 + \binom{\frac{1}{3}}{1} \times 0.02 + \binom{\frac{1}{3}}{2} \times (0.02)^2 + \dots \approx 1.006662$$

參考書目

1. 微積分發展史 C.H.Edwards 原著 凡異出版社 p.189 p.203

後記

聽 Monica 說 在化學課會用到開立方的東西 例如 $\sqrt[3]{1.02} =$

所以我把這段歷史交代一下。

學生上數學課忙於解題，對證明的過程不太有興趣，遑論數學史。

說數學史對數學教育有幫助，是學者說的。

$\sqrt[3]{1.02} = ?$ 其實按一下計算器就可以，在 APCalculus 中就是用 Grapher，我想 108

課綱微積分的部分原來是想用 Grapher 的。