

多項式函數的極限

例1. 求 $f(x) = -3x + 5$ 在 $x = 2$ 的極限

例2. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \leq 3 \\ ax, & \text{若 } x > 3 \end{cases}$ 是連續函數，則 $a =$

【3】

習作

函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 - x - a + 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$ ，且 $f(x)$ 在 $x = 1$ 連續，則 $a =$

【3】

分式函數的極限

例3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4}{x - 2} =$

習作

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 4} =$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x + 2} =$

3. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x - 10} =$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - x - 6} =$

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1} =$

【1. -1 2. 3 3. $\frac{5}{7}$ 4. $\frac{12}{7}$ 5. 0】

例4. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x-4}{x-3} + \frac{2}{x^2-4x+3} \right) =$

【 $\frac{1}{2}$ 】

習作

1. $\lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{2x-17}{x^2-7x+6} + \frac{x-5}{x-6} \right) =$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5} \right) =$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{x-2} - \frac{5x-4}{x^2-x-2} \right) =$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+ax+1}{x^2+x-2} = b$ ，求 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$

【1. $\frac{8}{5}$ 2. $\frac{1}{32}$ 3. 0 4. $a = -2, b = \frac{1}{3}$ 】

例5. 設 a, b 為實數， $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = 5$ ，求 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$

【 $a=1, b=-6$ 】

習作

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+(b-1)x-b}{x+a} = 4$ ，則數對 $(a, b) =$

2. 極限 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x+a}{x-3}$ 存在，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ，並求此極限值 =

【1. $(-1, 3)$ 2. $a = -3$ ，極限值 = 4】

例6. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2$, 求 $f(x)=$

$$\mathbf{【3x^3 - 13x^2 + 18x - 8】}$$

例7. 已知 $f(x)$ 為三次多項式，且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)(x-2)} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-1)(x-2)} = 2$,
則 $f(x)=$

$$\mathbf{【f(x)=(3x-4)(x-1)(x-2)】}$$

習作

1. 設 $f(x)$ 是 x 的三次函數，且滿足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$, 試求 $f(x)$

2. $f(x)$ 是三次多項式具有下列性質：

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2 , \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 1 , f(x)=(x-1)(x-2)g(x) , \text{則 } g(0)=$$

$$\mathbf{【1.f(x)=x(x-1)(3x-1) \quad 2.-5】}$$

根式函數的極限

例8. $\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1}) =$

$$\mathbf{【1】}$$

例9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - (1+ax)}{x^2} = b$, 求 $a=$ _____ , $b=$ _____

$$\mathbf{【a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{8}】}$$

習作

1. $\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x^2 + 3x - 2} + \sqrt{x+1}) =$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 1}{\sqrt{x+1} + 3} =$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2}} =$

4. 設 a 、 b 是異於 0 的常數，且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+a} - b}{x-1} = \frac{1}{6}$ ，則 $a =$ _____， $b =$ _____

【1.6 2. $\frac{2}{5}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. $a=8$ ， $b=3$ 】



例10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} =$

【 $\frac{1}{2}$ 】

習作

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x+6} - \sqrt{8}} =$

2. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x+4} - 3} =$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{5x-1} - \sqrt{4x+1}} =$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} \right) =$

【1.2 2.6 3.-3 4. $\frac{3}{2}$ 】



習作(一)

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x-4}{x-3} + \frac{2}{x^2-4x+3} \right) =$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x+1}{x-5} - \frac{10x+10}{x^2-25} \right) =$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{4}{x-4} \right) =$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} =$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+5}-2} =$$

【1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{3}{5}$ 3. $\frac{1}{4}$ 4. $\frac{1}{12}$ 5.4】



習作(二)

1. 已知 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，則(A) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ， $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 均存在 (B) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ， $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 均存

在且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ (C) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ， $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 兩者至少有一存在 (D) 以上皆非

$$2. \lim_{x \rightarrow -2} (x^3+3x+5) =$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4}{x-2} =$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x-3} =$$

5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} =$

6. 函數 $f(x) = \begin{cases} ax^2 - x - a + 1, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$ ，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 連續，則 $a =$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{x - 1} =$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2}}{x} =$

9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+3} - b}{x - 1} = 1$ ，求數對 $(a, b) =$

10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax + 1}{x^2 + x - 2} = b$ ，則 $a + b =$

11. $f(x)$ 是 3 次多項式，且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 2, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = -1$ ，則 $f(3) =$

【1.D 2.-9 3.3 4.27 5.5 6.3 7. $-\frac{1}{2}$ 8. $\frac{\sqrt[3]{2}}{6}$

9.(4, 8) 10. $-\frac{5}{3}$ 11.0】



高斯函數

例11. 求下列各極限 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} [x] =$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} x[x] =$ (3) $\lim_{x \rightarrow 0} [x^2] =$

【(1)不存在 (2)0 (3)0】

習作

$[x]$ 表不大於 x 之最大整數，則下列何者正確？

(A) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} = 0$ (B) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{x} = \infty$ (C) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{[x]}{x}$ 不存在 (D) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x} = 1$

(E) $\lim_{x \rightarrow 1.5} x - [x] = 1$

【A, B, C, D】



綜合練習

1. 設 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 存在，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 與 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 符合下列何者描述？

(A) 二者均存在 (B) 二者均不存在 (C) 二者中若有一個存在，則另一個必存在

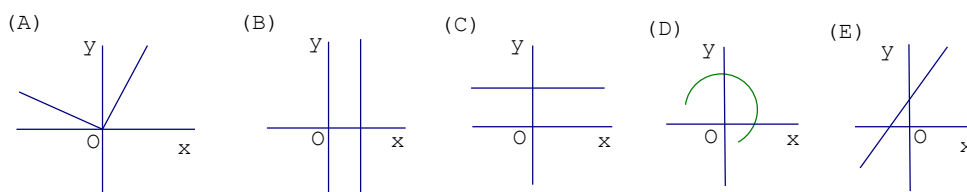
(D) 二者中若有一個存在，則另一個必不存在。

2. 下列何者正確？

(A) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x} = \frac{1}{2}$ (B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2+3x}{3x^2+5} = \frac{4}{3}$ (C) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2-1} = 0$

(D) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} = 1$

3. 下列圖形中，哪些不是函數的圖形？



4. 下列各數列何者收斂？

(A) $\langle 1 + (-1)^n \left(\frac{9}{10}\right)^n \rangle$ (B) $\langle 2 \times \left(-\frac{9}{10}\right)^{n-1} \rangle$ (C) $\langle \cos \frac{n\pi}{2} \rangle$ (D) $\langle \frac{3^n}{2^{2n-1}} \rangle$

(E) $\langle \frac{(-1)^n}{2n-1} \rangle$

5. 若 $m \in N$ 為定數， n 趨近於 ∞ ，則下列各數列何者沒有極限？

(A) $\langle (\frac{m}{m+1})^n \rangle$ (B) $\langle (\frac{m+1}{m-1})^n \rangle$ (C) $\langle (\frac{m-n}{m+n})^n \rangle$

(D) $\langle (\frac{n+1}{n})^m \rangle$ (E) $\langle (\frac{n}{n+1})^m \rangle$

6. 下列哪一個無窮級數發散？(A) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ (B) $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^{k-1}$ (C) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{6^k}$

(D) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$

7. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}) =$

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} =$

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1}) =$

10. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{1+2+3+\dots+n} - \sqrt{1+2+3+\dots+(n-1)}) =$

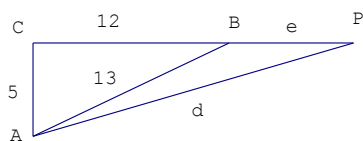
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3}$ 之值 =

12. α, β 為 $x^2 - \sqrt{3}x - 1 = 0$ 的兩根，且 $\alpha > \beta$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n - \beta^{n+1}}{\alpha^{n+1} - \beta^{n-1}} =$

13. 令 a_n 表示 21^n 的所有正因數的總和，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{21^n} =$

14. 如下圖， $\triangle ABC$ 是直角三角形，其中 $\overline{AB} = 13$ ， $\overline{AC} = 5$ ， $\overline{BC} = 12$ ，一質點 P

沿著 \overrightarrow{CB} 作直線運動，令 $\overline{PB} = e$ ， $\overline{PA} = d$ ，則 $\lim_{e \rightarrow \infty} (d - e) =$



15. 設 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 4, & \text{當 } x \leq 2 \\ x + 2, & \text{當 } x > 2 \end{cases}$, 則 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$

16. $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 - 2x + 2 - a}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 8, & x = 1 \end{cases}$, 若 $y=f(x)$ 的圖形在 $x=1$ 連續, 則 $a =$

17. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{a\sqrt{x+5} + b}{x+1} = \frac{1}{4}$, 求數對 $(a, b) =$

18. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - mx + 8}{x^2 - (n+2)x + 2n} = \frac{1}{5}$, 求 $m =$ _____, $n =$ _____

19. a, b 是實數, $a > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + bx + 3b}{x - a} = 8$, 求 $a =$ _____, $b =$ _____

20. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} =$

21. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{\sqrt{x + 2} - 2} =$

22. $f(x)$ 是三次多項式, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = -5, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = 8$, 求 $f(0) =$

23. 設 $f(x)$ 為三次函數, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 8, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = 2$, 則 $f(x) =$

24. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+2)^{10} - 1}{x+3}$ 的值 =

25. n 是正整數，座標平面上一等腰 $\triangle ABC$ ，已知 $A(0, 2)$ ， $B(\frac{1}{n}, 0)$ ， $C(-\frac{1}{n}, 0)$ ，

若 $\triangle ABC$ 的外接圓直徑為 D ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n =$

26. 將 $\tan x = x$ 的所有正實根由小到大排列，得一無窮數列 x_1, x_2, x_n, \dots ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n$

$+1 - x_n) =$ (四捨五入到小數第二位)

27. 試問下列有關極限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3 - 3x - x^2| - 1}{x - 1}$ 的敘述何者正確？

(A)極限不存在 (B)極限為 0 (C)極限為 1 (D)極限為 5 (E)極限為 -1

【答案】

1.C 2.B 3.B, D 4.A, B, D, E 5.B, C

6.D 7. $\frac{1}{2}$ 8. $\frac{1}{2}$ 9. $\frac{3}{2}$ 10. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

11. $\frac{1}{3}$ 12. $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$ 13. $\frac{7}{4}$ 14.12 15.4

16.5 17. $a=1, b=-2$ 18. $m=6, n=12$ 19. $a=6, b=-4$ 20. $\frac{1}{3}$

21.1 22.4 23. $f(x)=(x+3)(x+1)(x-1)$ 24.-10 25.2

26.3.14 27.D