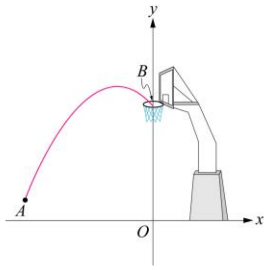
數列與函數的極限

重點整理

1-1 函數的極限



1. 一拋物體的高度隨時間的改變而改變，時間 t 稱為<u>自變數</u>，高度 h 稱為<u>應變數</u>，我們說：高度是時間的函數。我們注意到，同一個時間不會對應到兩個高度，同一個高度可以有兩個時間與之對應。

2. 線型函數 $y=f(x)=ax+b$， 其中，若 $a\neq 0$，則稱 $f(x)$為 x 的一次函數；若 $a=0$，則稱 $f(x)$為常數函數。a 有兩個角色：(1)幾何意義下，直線的斜率，(2)代數意義下，函數 y 對 x 的變化率。

3. 在座標平面上，函數 $y=f(x)$的圖形就是所有$(x，f(x))$的點描繪出來所成的圖形。

4. 如果當 x 逐漸靠近一實數 a，但是 $x\neq a$ (即從 a 的左右兩邊向 a 靠近)，$f(x)$會向一實數 L 靠近，(當 x 足夠靠近 a 時，$f(x)$與 L 的距離可以任意小)，則稱為 L 式 $f(x)$在點 a 的極限，用 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ 表示。

5. 如果 x 逐漸靠近 a 時，沒有任何實數 L 可使函數值 $f(x)$滿足上述條件，則稱 $f(x)$在點 a 沒有極限(或者說極限不存在)。

6. 若 $f(x)$是多項式函數，則 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ (即 $f(x)$是連續函數)

7. 若 $f(x)$是分式，則 $f(x)$不是連續函數

8. 函數極限的性質 若 $f(x)$，$g(x)$都是多項式函數，且 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 與 $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 都存在，則

(1) $\lim\limits_{x\to a}(bf(x)+cg(x))=b\lim\limits_{x\to a} f(x)+c\lim\limits_{x\to a} g(x)$

(2) $\lim\limits_{x\to a}(bf(x)-cg(x))=b\lim\limits_{x\to a} f(x)-c\lim\limits_{x\to a} g(x)$

(3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\times\lim\limits_{x\to a} g(x)$

(4) 當 $\mathit{lim}_{x\to a} g(x)\neq 0$ 時， $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

主題1．函數的概念

1. 下列哪一個 y 不是 x 的函數？

(A)

x	1	2	3	4	5
y	1	1	-1	1	2

(B)

x	1	2	3	4	5
y	1	4	9	16	25

(C)

x	1	2	3	4	1
y	1	4	9	16	-1

(D)

x	1	2	3	4	5
y	5	4	3	2	1

2. 函數 $y=f(x)$的圖形通過(-1，-7)，(0，-4)，(1，-1)，(3，5)，(4，8)，求 $f(-1)+f(1)+f(3)=$

3. $f(x)=\begin{cases} 70, 0<x<1.5 \\ 75+5[\dfrac{10}{3}x-5], x\geq 1.5 \end{cases}$，其中[ ]是高斯符號，則(1)$f(3.4)=$

(2)若 $f(x)=100$，則 x 的範圍為何？

【1.C　2.-3　3.(1)105 (2) $3\leq x<3.3$】

主題2．無窮數列極限的意義

例1.　求下列三個數列的極限(1) $<\dfrac{n-1}{n}>$　(2) $<\dfrac{1}{2^n}>$　(3) $<2n>$

求下列三個數列的極限(1) $<(0.99)^n>$　(2) $<(-0.8)^n>$　(3) $<(1.1)^n>$ (4) $<\dfrac{2^n+3^n}{6^n}>$

【(1)0 (2)0 (3)不存在 (4)0】

例2.　以下求 $\lim\limits_{n->\infty} a_n=$？

(1) $\lim\limits_{n->\infty}\dfrac{1-n}{2n+3}=$　(2) $\lim\limits_{n->\infty}\dfrac{n^2+3n-2}{5n^2+n+4}=$　(3) $\lim\limits_{n->\infty}\dfrac{3n}{n^2+1}=$

(4) $\lim\limits_{n->\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+...+\frac{n}{n^2})=$

(5) $\lim\limits_{n->\infty}(\frac{n^2+3n}{n+1}-\frac{n^3+5n}{n^2+1})=$

(6) $\lim\limits_{n->\infty}\frac{2^n+3^{n-1}}{2^{n-1}+3^n}=$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=$

【$(1)-\frac{1}{2}$ $(2)\frac{1}{5}$ $(3)0$ $(4)\frac{1}{2}$ $(5)2$ $(6)\frac{1}{3}$ $(7)\frac{1}{2}$】

習作 以下求 $\lim\limits_{n->\infty}a_n=$

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)(2n+5)}{(2n+3)(3n-1)}=$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^3}+\frac{4}{n^3}+...+\frac{n^2}{n^3})=$
3. $\lim\limits_{n->\infty}\frac{3n^2-4n+5}{-2n+7}=$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})=$

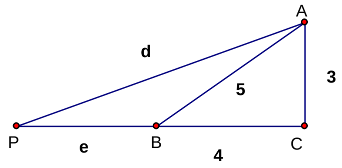
【1.$\frac{1}{3}$ 2.$\frac{1}{3}$ 3.不存在 4.3 5.1】

例3. <$(1-2x)^{n-1}$>收斂，求 x 的範圍

【$0\le x<1$】

例4.　直角三角形 ABC 中，P 點沿 $\overleftrightarrow{CB}$ 坐直線運動，令

$\overline{PB}=e,\overline{PA}=d$，求 $\lim\limits_{e\to\infty}(d-e)=$



【4】

解　$d=\sqrt{(e+4)^2-9}=\sqrt{e^2+8e+25}$

$$\lim_{e\to\infty}(d-e)=\lim_{e\to\infty}\frac{8e+25}{\sqrt{e^2+8e+25}+e}=\frac{8}{2}=4$$

習作

1.　$P_n(n，y_n)$在雙曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 上，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{{y_n}^2}{n^2}=$

2.　$S_n=1+2+3+\ldots+n$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+3}}-\sqrt{S_{n+1}})=$

3.　$A(0，\dfrac{2}{n})$，$B(0，-\dfrac{2}{n})$，$C(4+\dfrac{2}{n}，0)$，S_n 表三角形 ABC 的外接圓面積，則 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$

4.　$A(1，n)$，$B(n，1)$，$C(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n})$，$S_n$ 表示 ΔABC 的面積，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^2}=$

5.　n 是正整數，$P(\sqrt{n+5},\sqrt{n-1})$ 到直線 L：x-y=0 的距離為 d_n。又，

$Q(\sqrt{n-1},\sqrt{n+5})$，$O(0，0)$，ΔOPQ 面積為 a_n，則(1) $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$

【1. $\dfrac{4}{9}$　2. $\sqrt{2}$　3. 4π　4. $\dfrac{1}{2}$　5.(1)0 (2)3】

習作

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2+3n}{n+1}-\frac{n^3}{n^2-1})=$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+...+\frac{n^2}{n^3})=$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}-n)=$

4. 已知<a_n>是收斂數列，若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n+5}=2$，則$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+a_n}{5n-2}=$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+(-1)^n}{5^n}=$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+(-1)^n}{5^n}=$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{-3x}{x^2+2}$，$x$=？

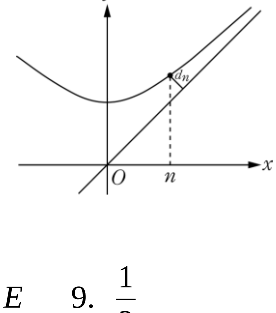
8. 下列無窮級數何者收斂？

(A)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1.01)^n$ (B)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{\pi}{4})^{n-1}$ (C)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ (D)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{99}{100})^{n-1}$ (E)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+n^2+1}=$

10. 甲乙兩個杯子分別裝有濃度 10%，20%的糖水 100*cc*，今同時由甲乙兩杯中分別取 10*cc* 的溶液放入對方杯內，則此時兩杯內糖水濃度為甲 a_1%，乙 b_1%，如此操作 n 次後，甲乙溶液的濃度為 a_n%，b_n%，則 (1)a_n+b_n= (2)求 a_{n+1}，a_n 的關係 (3)$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$

11. 考慮雙曲線 $y^2-x^2=1$ 圖形的上半部（如附圖）， 取此雙曲線上 x 坐標為 n 的點與漸近線 $y=x$ 的距離，記為 d_n，其中 n 為正整數。則$\lim\limits_{n\to\infty}(nd_n)=0.$______ （以四捨五入取到小數兩位）

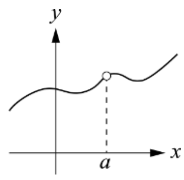
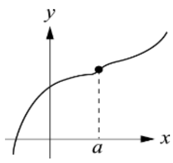
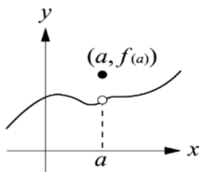
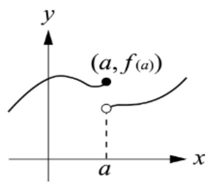
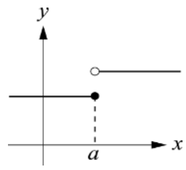


【1.2 2. $\frac{1}{3}$ 3.-1 4.2 5.0 6. $\frac{37}{48}$ 7. $-\frac{1}{2}$ 8.B，D，E 9. $\frac{1}{2}$

10.(1) (2) (3)0 11.35】

主題3．函數的極限

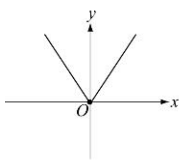
例5. 　函數 $f(x)$之圖形如下所示，並已標出實數 a 之位置，則哪一個函數中 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$不存在？

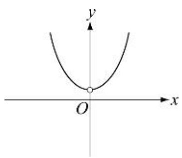
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
				

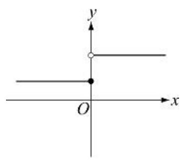
【D，E】

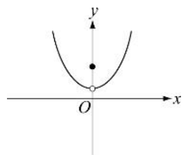
習作

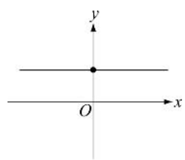
1. 下列各函數圖形中，何者$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$存在？

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


【 1. A，B，D，E 　2.(1)略 】

例6. 　$f(x)=\begin{cases} x^2, 若x\le 3 \\ ax, 若x>3 \end{cases}$是連續函數，則 a=

習作

$f(x)$=$\begin{cases} x^2+ax+b，若\ x<2 \\ x^3+2ax^2-3bx-1，若\ x\ge 2 \end{cases}$，已知 $f(x)$在 x=2 之極限值為 9，則(a，b)=

【$(\frac{8}{5},\frac{9}{5})$】