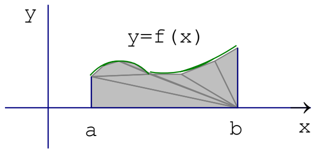
多項式函數的積分 § 定積分的應用

重點整理

1. 曲線間的面積

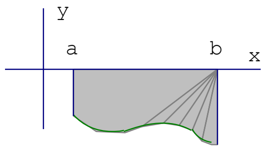
(1) $f(x)\ge 0, x\in[a,b]$，則曲線 $y=f(x)$與 x 軸所圍成的區域

面積$=\int_a^b f(x)dx$



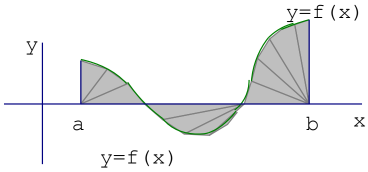
(2) $f(x)\le 0, x\in[a,b]$，則曲線 $y=f(x)$與 x 軸所圍成的區域面

積$=-\int_a^b f(x)dx$



(3) 如右圖，曲線 $y=f(x)$與 x 軸所圍的區域面積

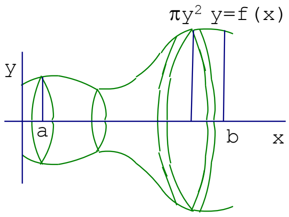
$=\int_a^c f(x)dx-\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx$



2. 兩曲線所圍的區域面積

在閉區間[a，b]內，y=f(x)與 y=g(x)所圍的區域面積為

$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$



3. 旋轉體的體積

曲線 $y=f(x)$與 x 軸以及 $x=a$，$x=b(a<b)$所包含的部分，

繞 x 軸旋轉所產生的旋轉體體積$=\int_a^b \pi(f(x))^2dx$

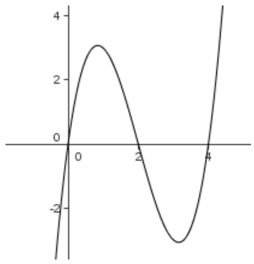
4. 位移與功

(1) 質點 m 在直線上做運動，x 秒的速度為多項式函數 $V(x)$，則 $x=a$ 秒到 $x=b$ 秒，質點 m 的位移為$\int_a^b V(x)dx$

(2) 若質點受水平方向的力，在 x 軸上移動，該質點在位置 x 時所受的力為多項式函數 $f(x)$，則此質點由 $x=a$ 移動到 $x=b$ 所需做的功為$\int_a^b f(x)dx$

主題 1.函數圖形圍成的區域面積

例1. 求 $y=f(x)=x^3-6x^2+8x$ 與 x 軸所圍封閉區域的面積



【 8】

習作

1. 試求多項式函數 $f(x)=x^3-x^2-2x$ 的圖形與 x 軸所圍的區域面積
2. 試求多項式函數 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$的圖形與 x 軸所圍的區域面積

【 1. $\frac{37}{12}$ 2. $\frac{1}{2}$ 】

例2. $\int_0^2 \left|x^2-x\right|dx=$

【1】

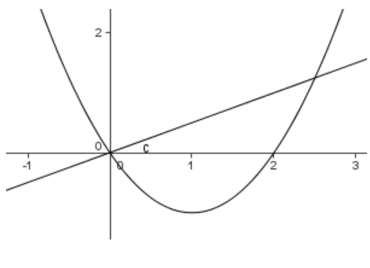
習作

1. $\int_0^4 \left|x^2-9\right|dx=$

2. $\int_{-2}^1 \left|x(x-1)(x+2)\right|dx=$

【 1. $\frac{64}{3}$ 2. $\frac{37}{12}$ 】

例3. $f(x)=x(x-2)$，$g(x)=\frac{x}{2}$，求區間[0，2]上 $f(x)$，$g(x)$間的面積。



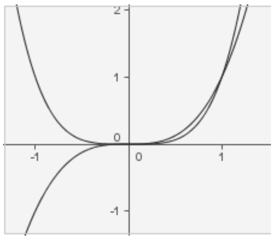
【 $\frac{7}{3}$ 】

習作

1. 試求直線 $y=x+2$ 與拋物線 $y=x^2$ 所圍成的區域面積
2. $y=f(x)=-x^2+4x$ 與直線 $y=2x$ 所圍區域面積=
3. 若 $y=x^2$ 與 $y=mx(m>0)$所圍成的區域面積=$\dfrac{9}{2}$，則 m=
4. 求拋物線 $x^2+y-4=0$ 與直線 $x-y=2$ 所圍區域面積=

【 1. $4\dfrac{1}{2}$　2. $\dfrac{4}{3}$　3.3　4. $\dfrac{125}{6}$ 】

例4. 求 $y=x^3$ 與 $y=x^4$ 所圍的面積



【 $\dfrac{1}{20}$ 】

習作

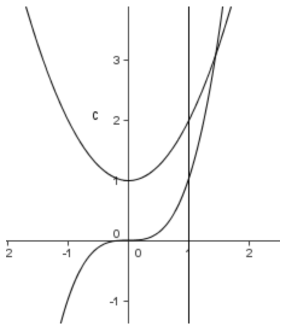
1. 試求兩拋物線 $y=x^2$ 與 $y=4x-x^2$ 所圍成的區域面積
2. 試求直線 $y=x$ 與曲線 $y=x^3$ 所圍成的區域面積

【 1. $\dfrac{8}{3}$　2. $\dfrac{1}{2}$ 】

例5. 求 $\begin{cases} y=x+6 \\ y=x^3 \\ 2y+x=0 \end{cases}$ 所圍的區域面積

【22 】

習作



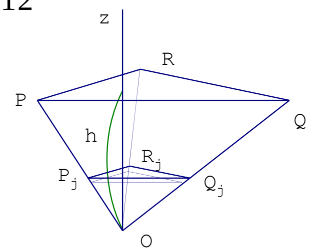
1. 求 $y=x^2+1$，$y=x^3$，$x=0$，$x=1$(右圖)所圍的區域面積
2. $y=f(x)=x^2$ 與 $y=0$，$x=2$，$x=3$ 所圍成的區域面積=

【 1.$1\frac{1}{12}$　2.$\frac{19}{3}$ 】

習作

1. 平面上，$O(0，0)$，$A(1，0)$，$B(1，1)$，$C(0，1)$，拋物線 $y=ax^2$ 的圖形平分正方形 $OABC$ 的面積，則 a=
2. 求兩曲線 $y=x^3-x$ 與 $y=-x^2+1$ 所圍區域的面積
3. 求兩曲線 $y=x^3$ 與 $y=x^4$ 所圍區域的面積
4. 求兩曲線 $y=x^2$ 與 $y=|x|$ 所圍區域的面積
5. 求兩曲線 $y=x^3$ 與 $y=2x^2+x-2$ 所圍區域的面積

【1.$\frac{16}{9}$　2.$\frac{4}{3}$　3.$\frac{1}{20}$　4.$\frac{1}{3}$　5.$3\frac{1}{12}$】



主題 2.體積

例1. 證明角錐的體積 $V=\frac{1}{3}\times$底面積$\times$高

取角錐頂點為原點 O，底面 PQR 的垂直方向為 z 軸

，設底面積為 A，高為 h，則平面 $z=j\times\frac{h}{n}$，j=1，2，3，…，$n-1$，這 $n-1$ 個平形底面的平面把角錐切成許多薄片，第 j 個薄片的體積 V_j

則 $(\frac{j-1}{n})^2\cdot A\cdot\frac{h}{n}\le V_j\le(\frac{j}{n})^2\cdot A\cdot\frac{h}{n}$

把這些體積相加

$$\frac{Ah}{n^3}\{0^2+1^2+2^2+...+(n-1)^2\}\le V\le\frac{Ah}{n^3}\{1^2+2^2+3^2+...+n^2\}$$

令 $n\to\infty$，因為 $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

所以 $V=\dfrac{1}{3}Ah$

例2. 求 $y=\dfrac{rx}{h}$，$0\le x\le 1$的圖形繞 x 軸的旋轉體體積

【 $\dfrac{\pi r^2}{3h^2}$ 】

例3. 證明半徑為 r 的球體體積為 $\dfrac{4\pi r^3}{3}$

例4. 如下圖，設 $0<r<b$，試求圓 $x^2+(y-b)^2=r^2$ 繞 x 軸旋轉一周所得的旋轉體體積=

【 $2\pi^2br^2$ 】

例5. 將 $y=x^2$ 與 $y=x^3$ 所圍區域繞 x 軸旋轉，則其旋轉體體積=

【 $\dfrac{2\pi}{35}$ 】

習作

1. 曲線 $y=|x^2-1|$ 與直線 $y=5$ 所圍成的區域繞 y 軸旋轉一圈所得的旋轉體體積=

【 1.17π 】

自我評量

1. 設 P 為拋物線 $\Gamma:y=x^2$ 上一點，其橫座標為 a，$a>0$;又設 L 為過 P 點之切線，求 Γ，L 與 x 軸所圍成區域的面積=
2. $y=f(x)=x^3-2x^2+x-1$ 與 $y=g(x)=-x^2+3x-1$ 所圍成的區域面積=
3. (1)將曲線 $y=\sqrt{1+\dfrac{x^3}{100}},2\le x\le 20$ 繞 x 軸旋轉所得旋轉體體積=__ (2)以此旋轉體作成容器裝滿水，然後再將水倒入某球體容器恰好裝滿(容器厚度不計)，則此球體容器半徑=

【 1.$\dfrac{a^3}{12}$　2. $\dfrac{37}{12}$　3.(1)$\dfrac{10449\pi}{25}$　(2)$\dfrac{9\sqrt[3]{430}}{10}$ 】

主題 3.物理上的應用

例1. 設在高度 $100m$ 處，以每秒 $20m$ 的初速度垂直向上拋一物，若地球的重力加速度為 $-9.8m/sec^2$，求

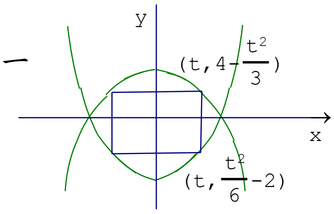
(1) t 秒後的速度 $v(t)$=

(2) 5 秒後的高度=

【1.$v(t)=20-9.8t$　2.$77.5m$】

綜合練習

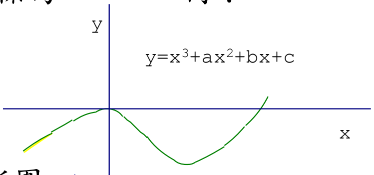
1. $fx)=x^3+3x^2-9x+5$，過(0，5)作切線 L，則 $y=f(x)$的圖形 Γ 與 L 所圍區域面積=
2. 設拋物線 $y=-2x^2+2$ 與 x 軸所圍成的區域為 R ，(1)求 R 的面積 (2)若直線 $y=a$ 平分區域 R，則 a=
3. 兩拋物線 $3y=12-x^2$ 及 $6y=x^2-12$ 圍出一區域 R，在 R 中作一矩形，使其四邊與兩座標軸平行，則此矩形的面積最大=



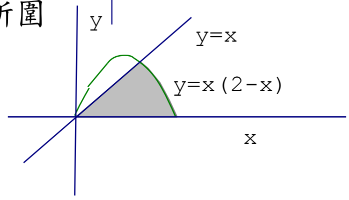
4. 曲線 $C:y=f(x)=x^3$
   (1) 求過 $A(2，8)$的切線 L 的方程式
   (2) 求曲線 C，切線 L 與 x 軸所圍成的區域 R 的面積
   (3) 求區域 R 繞 x 軸旋轉所成的旋轉體體積
5. 設拋物線 $\Gamma:y=x^2-ax+a$ 與 x 軸交於$(p，0)$，$(q，0)$兩點，其中 $0<p<q$。Γ 在

第一象限與 x 軸，y 軸所夾區域面積為 α，Γ 在第四象限與 x 軸所夾區域面積為 β，若 $\alpha=\beta$，則(1)q=　(2)a=

6. 曲線 $y=x^4-2x^3-x^2+2x$ 與 x 軸的交點中，最左邊的點座標為　何？此曲線與 x 軸所圍城區域的面積為何？

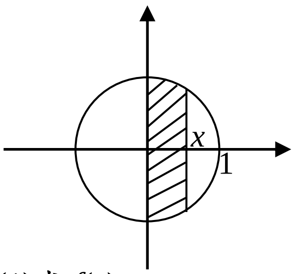


7. 設曲線 $y=x^3+ax^2+bx+c$ 的圖形如右，且與 $y=0$ 在原點相切。若此切線與曲線所圍的區域面積=3，求 a，b，c



8. 如右圖，斜線部分為拋物線 $y=x(2-x)$與直線 $y=x$ 及 x 軸所圍成的區域，求此區域的面積

9. 考慮座標平面上函數 $y=x^3+2x+3$ 的圖形(x 為任意實數)，是問下列哪些選項是正確的？
(1) 圖形有最高點，也有最低點
(2) 圖形有水平切線
(3) 圖形與任一水平直線恰有一交點
(4) 若(a，b)在圖形上，則($-a$，$-b+6$)也在圖形上
(5) 圖形與三直線 $x=0$，$x=1$，$y=0$ 所圍成的區域面積大於 4



10. 令 $f(x)$表右圖單位圓內斜線部分的面積，$0<x<1$，　則

$f'(x)$= (A) $\sqrt{1-x^2}$　(B) $-\sqrt{1-x^2}$　(C) $2\sqrt{1-x^2}$　(D) $-2\sqrt{1-x^2}$

(E) π

11. 三次函數 $y=f(x)$在 $x=1$ 時有極小值 0，在 $x=-3$ 時有極大值 32 (1)求 $f(x)$
(2)過 $A(0，f(0))$作 $y=f(x)$的切線，則此切線與 $y=f(x)$的圖形所圍區域的面積=

12. (1)直線 $y=3x+a$ 與曲線 $y=x^3+2$ 有 3 個交點，求 a 的範圍 (2)若滿足(1)的實數 a 的整數值為 a_1，a_2，a_3，…，其中 $a_1<a_2<a_3<\ldots$，則 $y=3x+a_2$ 與 $y=x^3+2$ 所圍區域的面積=

13. 曲線 $y=3-x^2$ 與直線 $y=2$ 所圍區域繞直線 $y=2$ 旋轉，所得的旋轉體體積=

14. 坐標平面上 $O(0，0)$，$A(1，0)$，$B(1，1)$，$C(0，1)$，拋物線 $y=ax^2$ 平分正方形 $OABC$ 的面積，則 a=0

15. 自 $A(0，1)$作拋物線 $y=-\frac{3}{4}x^2-2$ 的兩切線，假設 R 表示拋物線與此切線所圍的區域。(1)求 R 的面積 (2)求 R 繞 x 軸轉的旋轉體體積

16. 曲線 $y^2=8x$ 與 $x=2$ 所圍區域為 R，求 R 繞 y 軸的旋轉體體積=

答 案

1. $\frac{27}{4}$ 2. (1) $\frac{8}{3}$ (2) $2-\sqrt[3]{2}$ 3.16 4.(1) $y=12x-16$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{256\pi}{63}$

5.(1)$q=4$ (2) $\frac{16}{3}$ 6.(1)(－1，0) (2) $\frac{49}{30}$ 7. $a=\sqrt{6}$ ，$b=c=0$ 8. $\frac{7}{6}$ 9.(3)(4)(5)

10.*C* *11.(1)* $f(x)=x^3+3x^2-9x+5$ *(2)* $\frac{27}{4}$ *12.(1)* $0<a<4$ *(2)* $\frac{9}{2}$ *13.* $\frac{16\pi}{15}$

14. $\frac{16}{9}$ *15.(1)4* *(2)* $\frac{514\pi}{45}$ *16.(1)* $\frac{32}{3}$ *(2)* $\frac{128\pi}{5}$