§ 黎曼和與定積分

1. 黎曼和

$f(x)$是區間$[a，b]$上的多項式函數，且 $f(x)\ge 0$，區域 R 的邊界是 $y=f(x)$的圖形，直線 $x=a$，$x=b$，x 軸。我們將$[a，b]$平分成 n 等分，將區域 R 分成 n 個長條形，用這 n 個矩形的面積來近似這 n 個長條形面積的和。當 n 趨近於∞，則這 n 個矩形面積和的極限即為區域 R 的面積。

假設 $x_0=a$，$x_n=b$，這 $n-1$ 個等分點為 x_1，x_2，…，x_{n-1}，在$[x_{i-1}，x_i]$中任取 t_i，則$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1})$表示 n 個矩形的面積和，我們稱$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1})$為函數 $f(x)$在$[a，b]$上對於分割點 x_0，x_1，x_2，…，x_n的黎曼和。

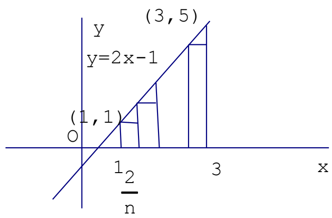
2. *另一種說法*

多項式函數 $f(x)$在區間$[x_{i-1}，x_i]$上的最大值為 M_i，最小值為 m_i，可得上黎曼和 $U_n=\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta x$，下黎曼和 $L_n=\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta x$，則$L_n\le\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x\le U_n$，如果 $\lim_{n\to\infty}U_n,\lim_{n\to\infty}L_n$都存在，且都等於 A，則$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x=A$，區域 R 的面積等於 A。

➢ **主題 1. 黎曼和**

例1. $f(x)=2x-1$ 的圖形與直線 $x=1$，$x=3$，x 軸所圍成的區域為 R。將$[1，3]$平分成 n 等分，求 $f(x)$在$[1，3]$上的上黎曼和與下黎曼和，並求區域 R 的面積。

【(1)上黎曼和$=\frac{8}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+2$ (2)下黎曼和$=\frac{8}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+2-\frac{8}{n}$ (3) 區域 R 的面積$=6$】

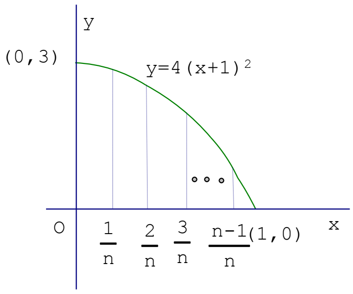


例2. 用黎曼和的極限求$\int_0^1 x^2dx$

【$\frac{1}{3}$】

§ 黎曼和與定積分

例3. 由 $y=f(x)=-x^2-2x+3$ 的圖形與 $y=0$，$x=0$，$x=1$ 所圍成的區域為 R，求 (1)R 的下和 L_n　(2)R 的上和 U_n　(3)滿足 $U_n-L_n<0.001$ 的最小正整數＝ (4)區域 R 的面積＝



【(1) $L_n=\dfrac{10n^2-9n-1}{6n^2}$　(2) $U_n=\dfrac{10n^2+9n-1}{6n^2}$　(3)3001　(4) $\dfrac{5}{3}$ 】

例4. 用黎曼和方法求函數 $f(x)=x^3$ 的圖形與直線 $x=0$，$x=2$ 及 x 軸所圍城區域的面積。

【4】

習作

1. 由 $y=-x^2+4$，$y=0$，$x=0$，$x=2$ 所圍的區域為 R，今將區間[0，2]分成 n 等分求(1)上和 U_n　(2)下和 L_n　(3)R 的面積＝

【1.(1)$U_n=\dfrac{16}{3}+\dfrac{4}{n}-\dfrac{4}{3n^2}$　(2)$L_n=\dfrac{16}{3}-\dfrac{4}{n}-\dfrac{4}{3n^2}$　(3)$\dfrac{16}{3}$ 】

§ 黎曼和與定積分

習作

1. 設 $f(x)=x^2+3$， $0\le x\le 3$ ，

   (1) 將[0，3]平分成 6 等分，分割：$0=x_0<x_1<..<x_6=3$，在每一小段$[x_{i-1}，x_i]$中取 $t_i=x_i$，求 $f(x)$在[0，3]對於分割的黎曼和。

   (2) 將[0，3]平分成 n 等分，分割：$0=x_0<x_1<..<x_n=3$，在每一小段$[x_{i-1}，x_i]$中取 $t_i=x_i$，求 $f(x)$在[0，3]對於分割的黎曼和。

   (3) 求 $y=f(x)$的圖形與 $x=0$，$x=3$，x 軸所圍成的區域面積。

2. 已知 $y=f(x)=x^2$，計算函數 $y=f(x)$的圖形與直線 $y=0$，$x=0$，$x=1$ 所圍成的區域 S 的面積，則

   (1) $U_4=$ $(A)\dfrac{15}{32}$ $(B)\dfrac{15}{8}$ $(C)\dfrac{11}{32}$ $(D)\dfrac{15}{48}$

   (2) $U_n=$

   $(A)\dfrac{(n-1)(2n+1)}{6n^2}$ $(B)\dfrac{(n+1)(2n^2+1)}{6n^3}$ $(C)\dfrac{(n+1)(2n+1)}{2n^2}$ $(D)\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

   (3) $U_n-L_n=$ $(A)\dfrac{1}{n^2}$ $(B)\dfrac{1}{n}$ $(C)\dfrac{1}{6n}$ $(D)\dfrac{1}{6n^2}$

   (4) S 的面積＝ $(A)2$ $(B)1$ $(C)\dfrac{1}{2}$ $(D)\dfrac{1}{3}$

【1.(1) $\dfrac{163}{8}$ (2) $\dfrac{27}{n^3}\times\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+9$ (3)18　2. (1)A (2)D (3)B (4)D】

§ 黎曼和與定積分

重點整理

1. 微積分基本定理：$F(x)$是$[a，b]$上的連續函數，$F(x)=\int_a^x f(t)dt$，則

   $F'(x)=f(x)$，稱 $F(x)$為 $f(x)$的反導函數

2. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

3. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

4. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

5. 若 $g(x)$是 $f(x)$的反導函數，則$\int_a^b f(x)dx = g(x)+c$

6. $\int x^n dx=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+c$

➢ **主題 1. 多項式函數的黎曼和**

例1. $b>0$，求$\int_0^b x^2dx=$

【$\dfrac{b^3}{3}$】

➢ **主題 2. 多項式函數定積分的性質**

例1. 求$\int_3^0 x^2dx=$

【-9】

習作

1. 已知 $f(x)$，$g(x)$為多項式函數，且$\int_0^4 f(x)dx=10,\int_0^4 g(x)dx=-2$，求

   $\int_0^4 [2f(x)-3g(x)]dx=$

2. 設 $f(x)$為一多項式函數，且$\int_0^{10} f(x)dx=12$，$\int_0^6 f(x)dx=8$，則$\int_6^{10} f(x)dx=?$

【1.26　2.4】

例2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^5+2^5+3^5+...+n^5}{n^6}=$

【$\dfrac{1}{6}$】

習作

求$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+...+\dfrac{n^2}{n^3})=$ 【$\dfrac{1}{3}$】

例3. 求定積分$\int_1^3(2x^3-3x+1)dx=$

【30】

例4. $\int_{-1}^2(x+1)^2dx-\int_{-1}^2(x-1)^2dx=$

【6】

習作

1. $\int_{-1}^2(x^2+x)dx-\int_{-1}^{-2}(x^2+x)dx=$
2. 若$\int_0^1 f(x)dx=10,\int_0^2 f(x)dx=8,\int_2^5 f(x)dx=6$，則$\int_1^5 f(x)dx=$

【1.$\dfrac{16}{3}$　　2.4】

例5. $\int_{-1}^1|x(x-2)|dx=$

【2】

例6. $\int_{-3}^{3}(6x^3+3x^2+4x-7)dx=$

【12】

習作

1. 求$\int_{0}^{3}(2x-6)dx=$

2. 若$\int_{0}^{4}f(x)dx=12,\int_{0}^{2}f(x)dx=20$，則$\int_{2}^{4}f(x)dx=$

3. $\int_{1}^{3}(2x+1)^2dx-\int_{1}^{3}(x-1)^2dx=$

4. $\int_{-1}^{3}\left|(x-1)(x-2)\right|dx=$

5. $\int_{-3}^{3}(97x^5+8x^3-7x)dx=$

【1.－9　2.－8　3.50　4.$5\frac{2}{3}$ 5.0】

➢ **主題 3. 微積分基本定理與反導函數**

例1. 已知 $f(0)=1$，$f'(x)=x\sqrt{x}$，求 $f(x)=$

【$\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+1$】

§ 黎曼和與定積分

例2. $f(x)=\int_3^x (2t^2-3t+1)dt$，則 $f'(2)=$

【3】

習作

1. $\int_a^x f(t)dt=x^2+x-2$，求(1)$f(x)=$　(2)$a=$

2. $f'(x)=3x^2-6x+2$，且 $f(0)=1$，求 $f(x)=$

【1.(1)$2x+1$　(2)1 或-2　2.x^3-3x^2+2x+1】

例3. $f(x)=\int_0^x (t-1)(t-2)^2dt$ 的極小值＝

【$-\dfrac{17}{12}$】

習作

1. 函數 $f(x)=\int_{-1}^x t(t-1)(t-2)dt$，求 $f(x)$的極大值＝　【$\dfrac{5}{2}$】

2. $f'(x)=x^3$，$f(0)=1$，求 $f(1)=$　$\dfrac{5}{4}$

3. $f'(x)=3x^2+2x-1$，$f(0)=1$，求 $f(1)=$　2

4. $f(x)=\int_{-1}^x t(t-1)^2dt$，求 $f(x)$的極小值＝　$-\dfrac{5}{12}$

5. $f(x)$是一個多項式，且$\int_a^x f(t)dt=x^2-3x$ 求(1)$f(x)=$　(2)$a=$

   (1)$2x-3$ (2)0 或 3

6. 已知 $f''(x)=2x+1$，$f'(0)=-2$，$f(0)=1$，求(1) $f'(x)=$　(2)$f(x)=$

   (1)x^2+x-2　(2)$\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2x+1$

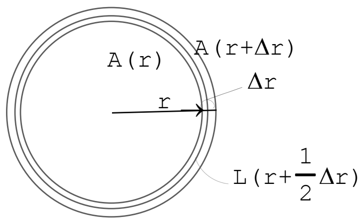
- **主題 4. 進階習作**

例1. 半徑為 r 的圓，周長 $L(r)=2\pi r$，面積 $A(r)=\pi r^2$，$A'(r)=L(r)$ 試以微積分的觀點說明之

$A(r+\Delta r)-A(r)=L(r+\frac{1}{2}\Delta r)\Delta r$

$L(r+\frac{1}{2}\Delta r)=\dfrac{A(r+\Delta r)-A(r)}{\Delta r}$，令 $\Delta r\to 0$，則

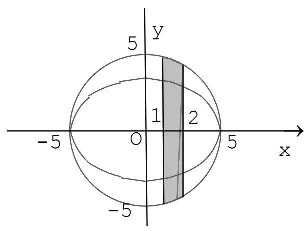
$L(r)=A'(r)$



(同理球體體積 $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$，表面積 $A(r)=4\pi r^2$，$V'(r)=A(r)$)

習作

1. 二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 滿足(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=25$ (2) $\int_{-1}^{1}f(x)dx=-\dfrac{110}{3}$ 求 $f(x)$ ＝
2. (1)求 $y=f(x)=x^3-3x^2$ 的極值與反曲點座標　(2)曲線 $y=x^3-3x^2$ 與直線 $y=x-3$ 所圍成的區域面積＝
3. 已知在圓 $x^2+y^2=25$ 內含一橢圓 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$，設圓內兩直線 $x=1$ 及 $x=2$ 之間的面積為 R_1，而橢圓內部在此兩直線之間的面積為 R_2，則 $\dfrac{R_1}{R_2}=$



4. 設 $f(x)=ax^2-2ax+3$，且 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=8$，求 $f(x)=$
5. 已知 $f(x)=x+1+\int_0^2 g(t)dt$，$g(x)=2x-3+\int_0^1 f(t)dt$，求 $f(x)=$　$g(x)=$

【1.$f(x)=5x^2+15x-20$　2. (1)極大值＝0，極小值＝−4，反曲點為(1，−2)　(2)8　3.$\dfrac{5}{3}$　4.$f(x)=3x^2-6x+3$　5.$f(x)=x$，$g(x)=2x-\dfrac{5}{2}$】